Geometria analityczna

Grzegorz Dymek

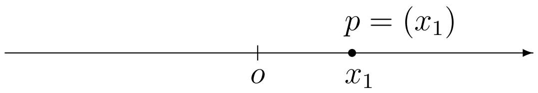
KUL 2024

Wstęp

Geometria analityczna to piękny, pobudzający wyobraźnię dział matematyki. Skrypt ten jest zapisem wykładów z Geometrii analitycznej prowadzonych na KUL-u dla studentów informatyki. Kurs Geometria analityczna obejmuje tylko 15 godzin wykładu, więc siłą rzeczy nie ma czasu na dokładne omówienie wielu ciekawych tematów. Zaczyna się od omówienia przestrzeni kartezjańskiej $\mathbb{R}^n$ i wektorów w tej przestrzeni, żeby potem przejść do podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$: prostych, płaszczyzn i stożkowych. Omawiane pojęcia są podane w przystępny i zrozumiały sposób i często są zilustrowane przykładami. Autor ma nadzieję, że skrypt ten będzie dla studentów pozycją wartościową i pomocną w zrozumienu geometrii analitycznej.

1. Przestrzeń kartezjańska $\mathbb{R}^n$

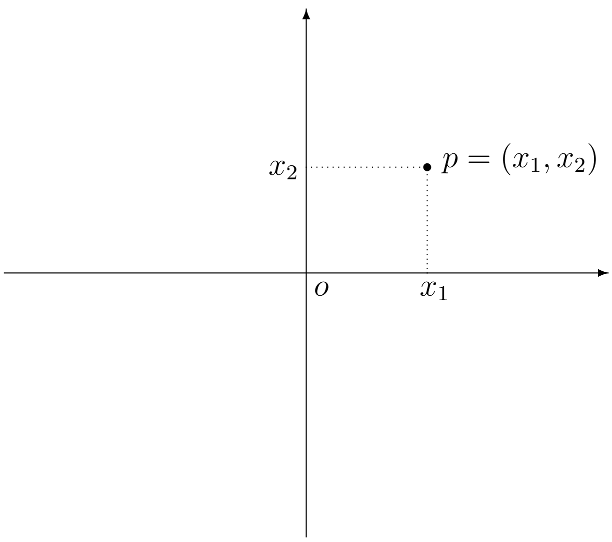
Współrzędne kartezjańskie na prostej:



Na prostej obieramy dowolny punkt o jako początek. Dzieli on prostą na dwie półproste. Przyjmując jedną półprostą jako dodatnią a drugą jako ujemną otrzymujemy oś. Dowolnemu punktowi p przyporządkowujemy liczbę x_1 nazywaną współrzędną kartezjańską punktu p. W ten sposób dostajemy **przestrzeń kartezjańską** $\mathbb{R}^1$. W przestrzeni tej mamy następujący wzór na odległość dwóch punktów $x, y \in \mathbb{R}^1$:

$$\rho(x, y) = |x - y| \, .$$

Współrzędne kartezjańskie na płaszczyźnie:

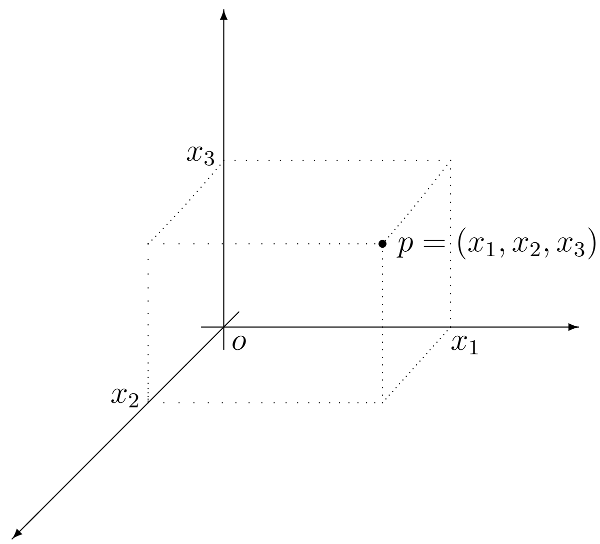


Na płaszczyźnie rozpatrzmy dwie proste przecinające się w punkcie o jako początku. Na każdej z tych prostych wprowadźmy współrzędne kartezjańskie (jak wyżej). Otrzymujemy osie, które tworzą kartezjański układ współrzędnych. Piszemy wtedy $p = (x_1, x_2)$ i liczby x_1, x_2 nazywają się współrzędne kartezjańskie punktu p.

Jeżeli osie są prostopadłe, to współrzędne kartezjańskie nazywają się prostokątne. W ten sposób dostajemy **przestrzeń kartezjańską** $\mathbb{R}^2$. W przestrzeni tej mamy następujący wzór na odległość dwóch punktów $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Współrzędne kartezjańskie w przestrzeni:



W przestrzeni weźmy trzy proste nie leżące w jednej płaszczyźnie i przechodzące przez jeden punkt o jako początek. Na każdej z tych prostych wprowadźmy współrzędne kartezjańskie. Otrzymujemy osie, które tworzą kartezjański układ współrzędnych. Piszemy wtedy $p = (x_1, x_2, x_3)$ i liczby x_1, x_2, x_3 nazywają się współrzędne kartezjańskie punktu p.

Jeśli każda oś jest prostopadła do dwu pozostałych osi, to układ nazywa się prostokątny. W ten sposób dostajemy **przestrzeń kartezjańską** $\mathbb{R}^3$. W przestrzeni tej mamy następujący wzór na odległość dwóch punktów $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Definicja. (**Przestrzeń metryczna**) Niech X będzie dowolnym zbiorem oraz niech $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ będzie funkcją. *Przestrzenią metryczną* nazywa się parę (X, ρ) spełniającą warunki

1) $\bigwedge\limits_{x,y \in X} \rho(x, y) = \rho(y, x)$,
2) $\bigwedge\limits_{x,y \in X} \rho(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$,
3) $\bigwedge\limits_{x,y,z \in X} \rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$.

Elementy zbioru X to punkty, ρ to metryka, a $\rho(x, y)$ to odległość punktów x, y.

Definicja. (**Przestrzeń kartezjańska n-wymiarowa**) Przestrzenią kartezjańską n-wymiarową nazywa się zbiór

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

wraz z metryką $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ określoną wzorem

$$\rho((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Zatem $(\mathbb{R}^n, \rho)$ jest przestrzenią metryczną.

Ćwiczenie. Pokazać, że funkcja ρ określona powyżej jest metryką.

Definicja. Niech $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ i $t \in \mathbb{R}$. Definiujemy

$$\begin{aligned}
x + y &\underset{df}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad - \quad \text{dodawanie punktów } x, y, \\
-x &\underset{df}{=} (-x_1, \ldots, -x_n) \\
x - y &\underset{df}{=} x + (-y) \quad - \quad \text{odejmowanie punktów } x, y, \\
tx &\underset{df}{=} (tx_1, \ldots, tx_n) \quad - \quad \text{mnożenie punktu } x \text{ przez liczbę } t, \\
x \cdot y &\underset{df}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad - \quad \text{mnożenie skalarne punktów } x, y, \\
x^1 &= x, x^{k+1} \underset{df}{=} x^k \cdot x \quad - \quad \text{potęgowanie punktu } x, \\
0 &\underset{df}{=} (0, \ldots, 0).
\end{aligned}$$

Twierdzenie. Niech $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ i $t \in \mathbb{R}$. Wtedy

1) $x + y = y + x$,
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
3) $t(x + y) = tx + ty$,
4) $tx = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee x = 0$,
5) $x \cdot y = y \cdot x$,
6) $\sim (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
7) $(tx) \cdot y = t(x \cdot y)$,
8) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
9) $(tx)^k = t^k x^k$,
10) $\sim (x \cdot y)^k = x^k \cdot y^k$,
11) $(x \cdot y)^2 \leqslant x^2 \cdot y^2$ – nierówność Cauchy-Schwarza.

Dowód. Łatwy. $\square$

Definicja. Niech $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. *Modułem* punktu x nazywa się liczbę:

$$|x| \underset{df}{=} \rho(x, 0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

(jest to odległość punktów x i 0).

Twierdzenie. Niech $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ i $t \in \mathbb{R}$. Wtedy

1) $x^2 = |x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$,
2) $\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x-y)^2}$,
3) $|x| \geqslant 0$,
4) $|x| = |-x|$,
5) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
6) $|tx| = |t|\,|x|$,
7) $|x \cdot y| \leqslant |x| \cdot |y|$,
8) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$,
9) $|x| - |y| \leqslant |x - y|$,
10) $(x+y)^2 = x^2 + 2x \cdot y + y^2$,
11) $(x-y)^2 = x^2 - 2x \cdot y + y^2$,
12) $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$.

Dowód. 1) – 5) Łatwy.

6) $|tx| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (tx_i)^2} = \sqrt{t^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = |t| \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |t|\,|x|$.

7) $|x \cdot y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} = |x| \cdot |y|$ (z nierówności Cauchy-Schwarza).

8) $|x + y| = |x - (-y)| = \rho(x, -y) \leqslant \rho(x, 0) + \rho(0, -y) = \rho(x, 0) + \rho(0, y) = |x| + |y|$.

9) $|x| = |y + (x - y)| \leqslant |y| + |x - y|$, skąd $|x| - |y| \leqslant |x - y|$.

10), 11) i 12) wynikają z własności 8) poprzedniego twierdzenia. $\square$

Definicja. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną i $a, b \in X$. *Odcinkiem metrycznym* nazywa się zbiór:

$$\langle a, b \rangle \underset{df}{=} \{x \in X : \rho(a, x) + \rho(x, b) = \rho(a, b)\}.$$

Definicja. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną i $a, b, c \in X$. Wtedy

$$c \text{ jest } \textit{środkiem} \text{ odcinka } \langle a, b \rangle \underset{df}{\Leftrightarrow} \rho(a, c) = \rho(b, c) = \frac{1}{2}\rho(a, b).$$

Twierdzenie. Niech $a, b \in \mathbb{R}^n$. Wtedy istnieje dokładnie jeden środek odcinka $\langle a, b \rangle$; jest to punkt $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

Dowód. Jeśli $a = b$, to Twierdzenie jest oczywiste. Niech $a \neq b$. Mamy

$$\rho(a, c) = |a - c| = \left| a - \frac{1}{2}(a + b) \right| = \frac{1}{2}\,|a - b| = \frac{1}{2}\,|b - a| = \left| b - \frac{1}{2}(a + b) \right| = |b - c| = \rho(b, c).$$

Stąd c jest środkiem odcinka $\langle a, b \rangle$.

Niech $d = c + x$ będzie innym środkiem odcinka $\langle a, b \rangle$. Wtedy

$$\rho(a, d) = \frac{1}{2}\rho(a, b) = \frac{1}{2}\,|a - b| = |a - d| = \left| a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - x \right| = \left| \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} \cdot 2x \right| = \frac{1}{2}\,|a - b - 2x|\,,$$

czyli $|a-b| = |a-b-2x|$.
Podobnie,

$$\rho(b,d) = \frac{1}{2}|a-b| = |d-b| = \frac{1}{2}|a-b+2x|,$$

skąd $|a-b| = |a-b+2x|$.
Zatem

$$|a-b-2x|^2 = |a-b+2x|^2,$$

czyli

$$(a-b)^2 - 4x(a-b) + 4x^2 = (a-b)^2 + 4x(a-b) + 4x^2,$$

skąd

$$x(a-b) = 0.$$

Teraz $a-b \neq 0$ (bo $a \neq b$), więc $x = 0$.
Zatem $d = c$. $\square$

Definicja. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Wtedy

$$A \text{ jest } \textit{wypukły} \underset{df}{\Leftrightarrow} \bigwedge_{a,b \in A} \langle a, b \rangle \subseteq A.$$

Wniosek. Odcinek w $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem wypukłym.

2. Wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Definicja. *Wektor związany* w $\mathbb{R}^n \underset{df}{=}$ uporządkowana para punktów w $\mathbb{R}^n$.

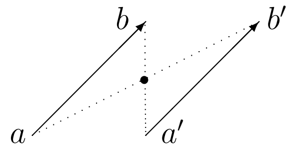
Oznaczenie: $\overrightarrow{ab}$ dla $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Definicja. Współrzędne wektora związanego $\overrightarrow{ab} \underset{df}{=}$ współrzędne punktu $b - a$.

Jeśli $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, to $\overrightarrow{ab} = [b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n]$.

Definicja. Niech $a, b, a', b' \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'} \underset{df}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{ab} \text{ i } \overrightarrow{a'b'} \text{ mają te same współrzędne } \underset{df}{\Leftrightarrow} b - a = b' - a' \\ \Leftrightarrow a' + b = a + b' \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a' + b) = \frac{1}{2}(a + b')\end{aligned}$$



(dwa wektory związane $\overrightarrow{ab}$ i $\overrightarrow{a'b'}$ są równe $\Leftrightarrow$ pokrywają się środki odcinków $\langle a', b\rangle$ i $\langle a, b'\rangle$).

Twierdzenie. Relacja równości wektorów związanych jest relacją równoważności.

Dowód. Łatwy. $\square$

Definicja. *Wektor swobodny* (*wektor*) w $\mathbb{R}^n \underset{df}{=}$ klasa równoważności relacji równości wektorów związanych,

czyli
$$\left[\overrightarrow{ab}\right] = \left\{\overrightarrow{cd} : \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd}\right\} \quad - \quad \text{wektor swobodny o reprezentancie } \overrightarrow{ab}.$$

Oznaczenie: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ (małe litery gotyckie).

Uwaga. Wszystkie reprezentanty wektora swobodnego mają te same współrzędne.

Definicja. Współrzędne wektora swobodnego $\underset{df}{=}$ współrzędne jego reprezentanta.

Definicja. Niech $\mathfrak{a}, a, b \in \mathbb{R}^n$ i $\overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a}$. Wtedy

$$|\mathfrak{a}| \underset{df}{=} \rho(a, b) \quad - \quad \text{długość wektora } \mathfrak{a}.$$

Jeśli $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, to $|\mathfrak{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$.

Definicja. *Wersor* $\underset{df}{=}$ wektor o długości 1.

Twierdzenie. (**O zaczepianiu wektora swobodnego w punkcie**) Każdy wektor swobodny w $\mathbb{R}^n$ można zaczepić w dowolnym punkcie $a \in \mathbb{R}^n$ w dokładnie jeden sposób.

Dowód. Niech $\mathfrak{a}, a \in \mathbb{R}^n$. Szukamy punktu $b \in \mathbb{R}^n$ takiego, że $\overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a}$. Niech $\overrightarrow{cd} \in \mathfrak{a}$. Wtedy

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd} \Leftrightarrow b - a = d - c \Leftrightarrow b = d - c + a. \quad \square$$

Twierdzenie. Dla każdego wektora swobodnego $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n$ i każdego punktu $b \in \mathbb{R}^n$ istnieje dokładnie jeden reprezentant wektora $\mathfrak{a}$ o końcu b.

Dowód. Analogiczny (wyliczamy a). $\square$

Definicja. Niech $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \mathfrak{b} = [\beta_1, \ldots, \beta_n] \in \mathbb{R}^n$ i $t \in \mathbb{R}$. Definiujemy

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} + \mathfrak{b} &\underset{df}{=} [\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n] \quad - \quad \text{dodawanie wektorów } \mathfrak{a}, \mathfrak{b},\\
-\mathfrak{a} &\underset{df}{=} [-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n] \quad - \quad \text{wektor przeciwny do } \mathfrak{a},\\
\mathfrak{a} - \mathfrak{b} &\underset{df}{=} [\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n] \quad - \quad \text{różnica wektorów } \mathfrak{a}, \mathfrak{b},\\
t\mathfrak{a} &\underset{df}{=} [t\alpha_1, \ldots, t\alpha_n] \quad - \quad \text{mnożenie wektora } \mathfrak{a} \text{ przez liczbę } t,\\
\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} &\underset{df}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \quad - \quad \text{iloczyn skalarny wektorów } \mathfrak{a}, \mathfrak{b}.
\end{aligned}$$

Uwaga. Piszemy $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$.

Twierdzenie. Niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathbb{R}^n$ i $t \in \mathbb{R}$. Wtedy

1) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$,
2) $(t\mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b} = t(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$,
3) $\mathfrak{a}^2 = |\mathfrak{a}|^2$,
4) $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}$,
5) $-|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \leqslant \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \leqslant |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|$.

Dowód. Łatwy. Punkt 5) wynika z nierówności Cauchy-Schwarza. $\square$

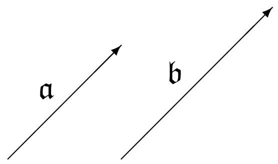
Twierdzenie. Niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, a, b, c \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

$$\overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a} \ \wedge \ \overrightarrow{bc} \in \mathfrak{b} \ \Rightarrow \ \overrightarrow{ac} \in [\mathfrak{a} + \mathfrak{b}]$$

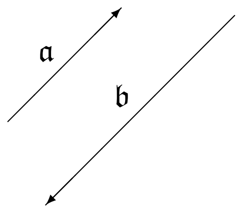
Dowód. Łatwy. $\square$

Definicja. Niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \text{ są } \textit{zgodnie równoległe}, \ \mathfrak{a} \upharpoonleft\!\!\upharpoonright \mathfrak{b} \underset{df}{\Leftrightarrow} |\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| = |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}|$$



$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \text{ są } \textit{przeciwnie równoległe}, \ \mathfrak{a} \upharpoonleft\!\!\downharpoonright \mathfrak{b} \underset{df}{\Leftrightarrow} |\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}| = |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|$$



$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \text{ są } \textit{równoległe}, \ \mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b} \underset{df}{\Leftrightarrow} \mathfrak{a} \upharpoonleft\!\!\upharpoonright \mathfrak{b} \ \vee \ \mathfrak{a} \upharpoonleft\!\!\downharpoonright \mathfrak{b}$$

Twierdzenie. Niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$ i $\mathfrak{a} \neq 0 \neq \mathfrak{b}$. Wtedy

$$\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b} \Leftrightarrow \bigvee_{t \neq 0} \mathfrak{b} = t\mathfrak{a}$$

$$\text{oraz} \quad t > 0 \Rightarrow \mathfrak{a} \upharpoonleft\!\!\upharpoonright \mathfrak{b},$$
$$t < 0 \Rightarrow \mathfrak{a} \upharpoonleft\!\!\downharpoonright \mathfrak{b}.$$

Dowód. Łatwy. □

Twierdzenie. W zbiorze wektorów niezerowych w $\mathbb{R}^n$ relacje $\parallel$ i $\upharpoonleft\!\!\upharpoonright$ są relacjami równoważności.

Dowód. Łatwy. □

Definicja. Niech $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

kierunek wektora $\mathfrak{a} \underset{df}{=}$ klasa równoważności relacji $\parallel$ o reprezentancie $\mathfrak{a}$,

czyli

$$\mathcal{K}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{b} : \mathfrak{b} \parallel \mathfrak{a} \ \wedge \ \mathfrak{b} \neq 0\}.$$

zwrot wektora $\mathfrak{a} \underset{df}{=}$ klasa równoważności relacji $\upharpoonleft\!\!\upharpoonright$ o reprezentancie $\mathfrak{a}$,

czyli

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{b} : \mathfrak{b} \upharpoonleft\!\!\upharpoonright \mathfrak{a} \ \wedge \ \mathfrak{b} \neq 0\}.$$

Mamy: $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathcal{K}(\mathfrak{a})$.

Uwaga. Niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$ i $\mathfrak{a} \neq 0 \neq \mathfrak{b}$. Ponieważ $-|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \leqslant \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \leqslant |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|$, więc istnieje dokładnie jedna liczba θ taka, że

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \cos\theta \quad \text{i} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Jeśli $\mathfrak{a} = 0$ lub $\mathfrak{b} = 0$, to θ jest dowolna taka, że $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Definicja. Niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$. Liczba $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in [0, \pi]$ taka, że

$$\cos(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})) = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|}$$

nazywa się *kątem w* $\mathbb{R}^n$ *między wektorami* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$.

Twierdzenie. Niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

1) $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sphericalangle(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$,
2) $t, s > 0 \;\Rightarrow\; \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sphericalangle(t\mathfrak{a}, s\mathfrak{b})$,
3) $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + \sphericalangle(-\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \pi$,
4) $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sphericalangle(-\mathfrak{a}, -\mathfrak{b})$.

Dowód. Łatwy. $\square$

Definicja. Niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \text{ są } \textit{prostopadłe},\ \mathfrak{a} \perp \mathfrak{b} \underset{df}{\Leftrightarrow} \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\pi}{2} \;\vee\; \mathfrak{a} = 0 \;\vee\; \mathfrak{b} = 0.$$

Twierdzenie. Niech$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

$$\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b} \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0.$$

Dowód. Wynika natychmiast ze wzoru $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \cos(\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$. $\square$

Definicja. (**Iloczyn wektorowy w** $\mathbb{R}^3$) Niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ i $\mathfrak{b} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$. Wtedy

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \underset{df}{=} \left[\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \right].$$

Uwaga. Jeśli przez i, j, k oznaczymy wersory osi współrzędnych w $\mathbb{R}^3$, czyli $i = [1, 0, 0]$, $j = [0, 1, 0]$ i $k = [0, 0, 1]$, to

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Przykład. Wyznaczyć $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ jeśli $\mathfrak{a} = [1, 1, -1]$ i $\mathfrak{b} = [2, -1, 3]$.

Rozwiązanie.

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right] = [2, -5, -3].$$

Twierdzenie. Niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathbb{R}^3$. Wtedy

1) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} = 0$,
2) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$,
3) $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}$ i $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{c} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$,
4) $t \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = (t \cdot \mathfrak{a}) \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times (t \cdot \mathfrak{b})$, gdzie $t \in \mathbb{R}$,
5) $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$, gdzie $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $\mathfrak{b} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$, $\mathfrak{c} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$,
6) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$,
7) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \perp \mathfrak{a}$ i $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \perp \mathfrak{b}$,
8) $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

Dowód. Punkty 1) – 5) wynikają z powyższej Uwagi i definicji.

6) Mamy

$$\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b} \;\Leftrightarrow\; \bigvee_{t \neq 0} \mathfrak{b} = t\mathfrak{a} \;\Leftrightarrow\; \bigvee_{t \neq 0} (t\mathfrak{a}) \times \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \bigvee_{t \neq 0} t(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = 0.$$

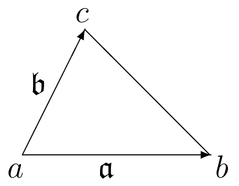
7) Wynika z 5).

8) Mamy dla $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ i $\mathfrak{b} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|^2 &= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 \\ &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2 \\ &= \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 - (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^2 \\ &= (|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|)^2 - (|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|)^2 \cos^2 \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \\ &= (|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))^2, \end{aligned}$$

skąd $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. $\square$

Twierdzenie. Niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, a, b, c \in \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{a} = \left[\overrightarrow{ab}\right]$, $\mathfrak{b} = \left[\overrightarrow{ac}\right]$ oraz niech $\triangle(a,b,c)$ będzie trójkątem o wierzchołkach a, b, c:



Wtedy

$$|\triangle(a,b,c)| = \frac{1}{2} \cdot |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$$

(pole trójkąta).

Dowód. Mamy następujący wzór Herona

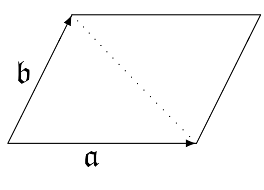
$$|\triangle(a,b,c)| = \frac{1}{4}\sqrt{s[s-2\rho(b,c)][s-2\rho(a,c)][s-2\rho(a,b)]},$$

gdzie $s = \rho(a,b) + \rho(a,c) + \rho(b,c)$.
Stąd

$$\begin{aligned}
|\triangle(a,b,c)| &= \frac{1}{4}\sqrt{(|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|)(|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|-|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|)(|\mathfrak{a}|-|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|)(-|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|+\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})(|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|-\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2-(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^2} \\
&= \frac{1}{2}\,|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\sin\sphericalangle(\mathfrak{a},\mathfrak{b}).
\end{aligned}$$

Zatem $|\triangle(a,b,c)| = \frac{1}{2}\,|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|$. $\square$

Wniosek. Liczba $|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|$ jest polem równoległoboku zbudowanego na wektorach $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^3$:



3. Przekształcenia przestrzeni metrycznej

Definicja. Niech (X, ρ), $(Y, \overline{\rho})$ będą przestrzeniami metrycznymi i niech $f : X \to Y$ będzie funkcją. Wtedy

$$f \text{ jest } \textit{izometrią} \underset{df}{\Leftrightarrow} 1) f : X \xrightarrow{na} Y,$$

$$2) \bigwedge_{x,x' \in X} \overline{\rho}(f(x), f(x') = \rho(x, x').$$

Przykłady.
1. Przesunięcie: $a \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = x + a$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Wtedy f jest izometrią, bo

$$\rho(f(x), f(x')) = \sqrt{(f(x) - f(x'))^2} = \sqrt{[(x + a) - (x' + a)]^2} = \sqrt{(x - x')^2} = \rho(x, x')$$

dla $x, x' \in \mathbb{R}^n$.
2. Obrót płaszczyzny $\mathbb{R}^2$: $\alpha \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$f(x) = (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)$ – obrót o kąt α
Wtedy f jest izometrią, bo

$$\begin{aligned}\rho(f(x), f(x'))^2 &= [(x_1 - x_1')\cos\alpha - (x_2 - x_2')\sin\alpha]^2 + [(x_1 - x_1')\sin\alpha + (x_2 - x_2')\cos\alpha]^2 \\ &= (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 \\ &= \rho(x, x')^2\end{aligned}$$

dla $x = (x_1, x_2), x' = (x_1', x_2') \in \mathbb{R}^2$.

Twierdzenie. Izometria jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym.

Dowód. Niech (X, ρ), $(Y, \overline{\rho})$ będą przestrzeniami metrycznymi i niech $f : X \to Y$ będzie izometrią. Wystarczy pokazać, że f jest przekształceniem różnowartościowym. Niech $x, x' \in X$. Załóżmy, że $f(x) = f(x')$. Wtedy

$$0 = \overline{\rho}(f(x), f(x')) = \rho(x, x') \Rightarrow x = x'. \quad \Box$$

Twierdzenie. Jeżeli $f : X \to Y$ jest izometrią, to $f^{-1} : Y \to X$ jest izometrią.

Dowód. Niech (X, ρ), $(Y, \overline{\rho})$ będą przestrzeniami metrycznymi i niech $f : X \to Y$ będzie izometrią. Oczywiście, f^{-1} jest na (bo f jest na). Niech $y, y' \in Y$. Istnieją $x, x' \in X$ takie, że $f^{-1}(y) = x$ i $f^{-1}(y') = x'$. Stąd $y = f(x)$ i $y' = f(x')$. Mamy

$$\rho(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) = \rho(x, x') = \overline{\rho}(f(x), f(x')) = \overline{\rho}(y, y'). \quad \Box$$

Twierdzenie. Superpozycja dwu izometrii jest izometrią.

Dowód. Niech (X,ρ), $(Y,\overline{\rho})$, $(Z,\widehat{\rho})$ będą przestrzeniami metrycznymi i niech $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ będą izometriami. Stąd

$$\bigwedge_{x,x'\in X} \overline{\rho}(f(x), f(x')) = \rho(x,x')$$

oraz

$$\bigwedge_{y,y'\in Y} \widehat{\rho}(g(y), g(y')) = \overline{\rho}(y,y').$$

Wtedy $gf: X \to Z$ i

$$\bigwedge_{x,x'\in X} \widehat{\rho}(gf(x), gf(x')) = \overline{\rho}(f(x), f(x')) = \rho(x,x'). \quad \square$$

Definicja. Niech (X,ρ), $(Y,\overline{\rho})$ będą przestrzeniami metrycznymi i niech $f: X \to Y$ będzie funkcją. Wtedy

$$f \text{ jest } \textit{podobieństwem} \underset{df}{\Leftrightarrow} 1) f: X \xrightarrow{na} Y,$$
$$2) \bigvee_{\lambda>0} \bigwedge_{x,x'\in X} \overline{\rho}(f(x), f(x') = \lambda\rho(x,x').$$

Liczbę λ nazywa się wtedy współczynnikiem podobieństwa f.

Uwaga. Każda izometria jest podobieństwem o współczynniku 1.

Przykład. Jednokładność o współczynniku $c > 0$: $j_c: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $j_c(x) = cx$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Wtedy j_c jest podobieństwem o współczynniku c, bo

$$\rho(j_c(x), j_c(x')) = \sqrt{(j_c(x) - j_c(x'))^2} = \sqrt{(cx - cx')^2} = c\sqrt{(x-x')^2} = c\rho(x,x')$$

dla $x, x' \in \mathbb{R}^n$.

Twierdzenie. Podobieństwo jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym.

Dowód. Niech (X,ρ), $(Y,\overline{\rho})$ będą przestrzeniami metrycznymi i niech $f: X \to Y$ będzie podobieństwem o współczynniku $\lambda > 0$. Wystarczy pokazać, że f jest przekształceniem różnowartościowym. Niech $x, x' \in X$ i $f(x) = f(x')$. Wtedy

$$0 = \overline{\rho}(f(x), f(x')) = \lambda\rho(x,x')$$

oraz

$$\lambda > 0 \;\Rightarrow\; \rho(x,x') = 0 \;\Rightarrow\; x = x'. \quad \square$$

Twierdzenie. Jeżeli $f: X \to Y$ jest podobieństwem o współczynniku λ, to $f^{-1}: Y \to X$ jest podobieństwem o współczynniku $\frac{1}{\lambda}$.

Dowód. Niech (X, ρ), $(Y, \overline{\rho})$ będą przestrzeniami metrycznymi i niech $f : X \to Y$ będzie podobieństwem o współczynniku $\lambda > 0$. Oczywiście, f^{-1} jest na (bo f jest na). Niech $y, y' \in Y$. Istnieją $x, x' \in X$ takie, że $f^{-1}(y) = x$ i $f^{-1}(y') = x'$. Stąd $y = f(x)$ i $y' = f(x')$. Mamy

$$\rho(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) = \rho(x, x') = \frac{1}{\lambda}\overline{\rho}(f(x), f(x')) = \frac{1}{\lambda}\overline{\rho}(y, y').$$

Zatem f^{-1} jest podobieństwem o współczynniku $\frac{1}{\lambda}$. $\square$

Twierdzenie. Superpozycja dwu podobieństw jest podobieństwem.

Dowód. Niech (X, ρ), $(Y, \overline{\rho})$, $(Z, \widehat{\rho})$ będą przestrzeniami metrycznymi i niech $f : X \to Y$ będzie podobieństwem o współczynniku λ_1 i $g : Y \to Z$ będzie podobieństwem o współczynniku λ_2. Pokażemy, że $gf : X \to Z$ jest podobieństwem o współczynniku $\lambda_1\lambda_2$. Niech $x, x' \in X$ i $y, y' \in Y$. Wiemy, że

$$\overline{\rho}(f(x), f(x')) = \lambda_1 \rho(x, x')$$

oraz

$$\widehat{\rho}(g(y), g(y')) = \lambda_2 \overline{\rho}(y, y').$$

Mamy

$$\widehat{\rho}(gf(x), gf(x')) = \lambda_2 \overline{\rho}(f(x), f(x')) = \lambda_1\lambda_2 \rho(x, x'). \quad \square$$

Definicja. Niech (X, ρ), $(Y, \overline{\rho})$ będą przestrzeniami metrycznymi. Wtedy

X i Y są *izometryczne* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ istnieje izometria $f : X \to Y$.

X i Y są *podobne* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ istnieje podobieństwo $g : X \to Y$.

Uwaga. Jeżeli X, Y są izometryczne, to są podobne, ale nie na odwrót.

4. Proste, płaszczyzny i hiperpłaszczyzny w przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Definicja. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną i niech $Y \subseteq X$. Wtedy

$$(Y, \rho|Y \times Y) \underset{df}{=} \text{podprzestrzeń przestrzeni metrycznej } (X, \rho)$$

Definicja.

$$\textit{Prosta} \underset{df}{=} \text{podprzestrzeń przestrzeni } \mathbb{R}^n \text{ izometryczna z } \mathbb{R}^1.$$

Uwaga. Niech $L \subseteq \mathbb{R}^n$. Wtedy

L jest prostą $\Leftrightarrow$ L jest izometryczna z $\mathbb{R}^1$ $\Leftrightarrow$ istnieje izometria $f : \mathbb{R}^1 \to L$ $\Leftrightarrow$ istnieje izometria $g : L \to \mathbb{R}^1$.

Uwaga. W $\mathbb{R}^1$ istnieje dokładnie jedna prosta. Jest nią $\mathbb{R}^1$.

Twierdzenie. (**O prostej**) Przez każde dwa różne punkty $a, b \in \mathbb{R}^n$ przechodzi dokładnie jedna prosta; jest nią zbiór $\{x(t) = (1-t)a + tb : t \in \mathbb{R}\} = L(a, b)$, gdzie $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ nazywa się przedstawieniem parametrycznym prostej $L(a, b)$.

Dowód. Weźmy $f : \mathbb{R}^1 \to L(a, b)$ takie, że $f(t) = x\left(\frac{t}{\rho(a,b)}\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Mamy dla $t, t' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\rho(f(t), f(t'))^2 &= \left[\left(1 - \frac{t}{\rho(a,b)}\right) a + \frac{t}{\rho(a,b)} b - \left(1 - \frac{t'}{\rho(a,b)}\right) a - \frac{t'}{\rho(a,b)} b\right]^2 \\
&= \left[\frac{(t-t')a - (t-t')b}{\rho(a,b)}\right]^2 = (t-t')^2 \\
&= \rho(t, t')^2.
\end{aligned}$$

Stąd f jest izometrią, czyli $L(a, b)$ jest prostą. Ponadto, $x(0) = a$ i $x(1) = b$ skąd $a, b \in L(a, b)$.

Pokażemy teraz, że $L(a, b)$ jest jedyna. Załóżmy, że istnieje prosta K taka, że $a, b \in K$. Pokażemy, że $K \subseteq L(a, b)$. Niech $g : \mathbb{R}^1 \to K$ będzie izometrią. Istnieją $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takie, że $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ i $\alpha < \beta$. Weźmy $c = g(\gamma) \in K$ takie, że $a \neq c \neq b$. Przypuśćmy, że $\alpha < \beta < \gamma$. Wtedy $|\beta - \alpha| + |\gamma - \beta| = |\gamma - \alpha|$. Stąd $\rho(b, a) + \rho(c, b) = \rho(c, a)$, bo g jest izometrią. Zatem

$$\left|\overrightarrow{ab}\right| + \left|\overrightarrow{bc}\right| = \left|\overrightarrow{ac}\right| = \left|\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}\right|,$$

czyli $\overrightarrow{ab} \parallel \overrightarrow{ac}$. Stąd istnieje $t \neq 0$ takie, że $c - a = t(b - a)$, skąd $c = (1-t)a + tb = x(t) \in L(a, b)$.

Podobnie gdy $\alpha < \gamma < \beta$ i $\gamma < \alpha < \beta$. Zatem $K \subseteq L(a, b)$. Dokładniej $K = L(a, b)$. $\square$

Uwaga. Piszemy następujące równanie parametryczne prostej $L(a,b)$:

$$L = L(a,b) : x(t) = (1-t)a + tb,\ t \in \mathbb{R}.$$

Definicja. Niech $\mathfrak{a}, a, b \in \mathbb{R}^n$ i niech $L \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie prostą. Wtedy

$\overrightarrow{ab}$ leży na $L \underset{df}{\Leftrightarrow} a, b \in L$.

$$\mathfrak{a} \parallel L \underset{df}{\Leftrightarrow} \bigvee_{\overrightarrow{ab}} \overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a} \wedge \overrightarrow{ab} \text{ leży na } L \Leftrightarrow \bigvee_{a,b\in L} \overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a}.$$

Definicja. Niech $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n$ i niech $L \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie prostą. Wtedy

Kierunek prostej $L \underset{df}{=}$ kierunek wektora $\mathfrak{a} \parallel L$.

Wektor kierunkowy prostej $L \underset{df}{=}$ wektor $\mathfrak{a} \parallel L$.

Twierdzenie. (**Druga postać równania parametrycznego prostej w $\mathbb{R}^n$**)

Niech $\mathfrak{a}, a \in \mathbb{R}^n$ i niech $L \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie prostą. Wtedy

$$a \in L \ \wedge\ \mathfrak{a} \parallel L \ \wedge\ \mathfrak{a} \neq 0 \ \Rightarrow\ L : x(t) = a + t\mathfrak{a},\ t \in \mathbb{R}.$$

Dowód. Niech $a \in L$, $\mathfrak{a} \parallel L$ i $\mathfrak{a} \neq 0$. Z Twierdzenia o zaczepianiu wektora swobodnego w punkcie, wektor $\mathfrak{a}$ można zaczepić w punkcie a. Wtedy istnieje punkt $b \in L$ (bo $\mathfrak{a} \parallel L$) taki, że $\mathfrak{a} = \left[\overrightarrow{ab}\right]$. Z Twierdzenia o prostej dla $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned}
&L : x(t) = (1-t)a + tb, \text{ czyli}\\
&L : x(t) = a + t(b-a),\\
&L : x(t) = a + t\left[\overrightarrow{ab}\right],\\
&L : x(t) = a + t\mathfrak{a}. \ \square
\end{aligned}$$

Uwaga. Jeśli $a = (a_1, \ldots, a_n) \in L$ oraz $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \parallel L$, to równanie parametryczne prostej $L : x(t) = a + t\mathfrak{a},\ t \in \mathbb{R}$ ma postać:

$$L : x(t) = (a_1 + t\alpha_1, \ldots, a_n + t\alpha_n),\ t \in \mathbb{R}.$$

Na przykład, $L : x(t) = (1+2t, -1+3t)$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, jest prostą w $\mathbb{R}^2$ taką, że $a = (1,-1) \in L$ i $\mathfrak{a} = [2,3] \parallel L$, oraz $K : y(s) = (-1+s, 2-s, 3+2s)$, gdzie $s \in \mathbb{R}$, jest prostą w $\mathbb{R}^3$ taką, że $a = (-1,2,3) \in K$ i $\mathfrak{a} = [1,-1,2] \parallel K$.

Definicja. Niech $L, K \subseteq \mathbb{R}^n$ będą prostymi, $\mathfrak{a} \parallel L$ i $\mathfrak{b} \parallel K$. Wtedy

$$L \parallel K \underset{df}{\Leftrightarrow} \mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b} \Leftrightarrow \bigvee_{t\neq 0} \mathfrak{b} = t\mathfrak{a}.$$

$$L \perp K \underset{df}{\Leftrightarrow} \mathfrak{a} \perp \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0.$$

Definicja. Niech $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^2$ i niech $L \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie prostą. Wtedy

Kierunek normalny prostej $L \underset{df}{=}$ kierunek wektora $\mathfrak{a} \perp L$.

Wektor normalny prostej $L \underset{df}{=}$ wektor $\mathfrak{a} \perp L$.

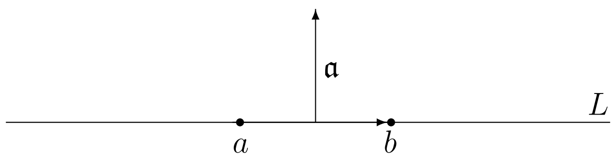
Twierdzenie. Dla każdego punktu $a \in \mathbb{R}^2$ i każdego niezerowego wektora $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2]$ istnieje w $\mathbb{R}^2$ dokładnie jedna prosta przechodząca przez a o wektorze normalnym $\mathfrak{a}$. Składa się ona z wszystkich punktów (x_1, x_2) spełniających równanie

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0, \text{ gdzie } \alpha_0 = -a \cdot (\mathfrak{a}).$$

Jest to równanie liniowe prostej L takie, że $a \in L$ i $\mathfrak{a} \perp L$.

Dowód. Niech $a = (a_1, a_2) \in L$, $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2] \perp L$ i $b = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Mamy (patrz poniższy rysunek):

$$\begin{aligned} b \in L \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{ab}\right] \perp \mathfrak{a} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{ab}\right] \cdot \mathfrak{a} = 0 \\ \Leftrightarrow [x_1 - a_1, x_2 - a_2] \cdot [\alpha_1, \alpha_2] = 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_1(x_1 - a_1) + \alpha_2(x_2 - a_2) = 0 \\ \Leftrightarrow -(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0. \end{aligned}$$



Przyjmując

$$\alpha_0 = -(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) = -a \cdot (\mathfrak{a})$$

otrzymujemy

$$L : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0.$$

Oczywiście, taka prosta jest tylko jedna. $\square$

Twierdzenie. Niech $L, K \subseteq \mathbb{R}^2$ będą prostymi takimi, że $L : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ i $K : \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0$. Wtedy

$K = L \;\Leftrightarrow\; \bigvee_{t \neq 0} \beta_i = t\alpha_i$ dla $i = 0, 1, 2$.

$K \parallel L \;\Leftrightarrow\; \bigvee_{t \neq 0} \beta_i = t\alpha_i$ dla $i = 1, 2$.

Dowód. Łatwy. $\square$

Definicja. Niech $L, K \subseteq \mathbb{R}^2$ będą prostymi i niech $a \in \mathbb{R}^2$. Wtedy

$$\rho(a, L) \underset{df}{=} \rho(a, b), \text{ gdzie } b \in K \cap L \text{ i } a \in K \perp L.$$

(odległość punktu a od prostej L w $\mathbb{R}^2$)

Twierdzenie. Niech $L \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie prostą taką, że $L : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ i niech $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Wtedy

$$\rho(a, L) = \frac{|\alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}.$$

Dowód. Niech $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2] \perp L$ i $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Wtedy $L : \alpha_0 + x \cdot (\mathfrak{a}) = 0$. Weźmy prostą K taką, że $K : x(t) = a + t\mathfrak{a}$. Wtedy $b \in K \cap L$, czyli $b = a + t'\mathfrak{a}$ oraz $\alpha_0 + b \cdot (\mathfrak{a}) = 0$, skąd

$$\begin{aligned}
\alpha_0 + (a + t'\mathfrak{a}) \cdot (\mathfrak{a}) &= 0 \\
\alpha_0 + a \cdot (\mathfrak{a}) + t'\mathfrak{a}^2 &= 0 \\
t'\mathfrak{a}^2 &= -\alpha_0 - a \cdot (\mathfrak{a}) \\
t' &= -\frac{\alpha_0 + a \cdot (\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}^2}.
\end{aligned}$$

Stąd $b = a - \frac{\alpha_0 + a \cdot (\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}^2}\mathfrak{a}$ i

$$\begin{aligned}
\rho(a, L) = \rho(a, b) &= |b - a| \\
&= \left| a - \frac{\alpha_0 + a \cdot (\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}^2}\mathfrak{a} - a \right| \\
&= \frac{|\alpha_0 + a \cdot (\mathfrak{a})|}{|\mathfrak{a}|^2} |\mathfrak{a}| \\
&= \frac{|\alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Definicja. Równanie $\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ prostej L w $\mathbb{R}^2$ nazywa się *unormowane*, jeśli $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2]$ jest wersorem (czyli $|\mathfrak{a}| = 1$).

Wniosek. Jeśli $\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ jest równaniem unormowanym prostej L w $\mathbb{R}^2$ i $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, to

$$\rho(a, L) = |\alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2|.$$

Twierdzenie. Każda prosta w $\mathbb{R}^2$ ma równanie unormowane.

Dowód. Łatwy. $\square$

Twierdzenie. Niech $L(a, b) \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie prostą i niech $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ będą takie, że $a \neq b$. Wtedy

$$L(a, b) : \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dowód. Mamy $\left[\overrightarrow{ab}\right] = [b_1 - a_1, b_2 - a_2] \parallel L(a,b)$. Łatwo widać, że

$$[b_1 - a_1, b_2 - a_2] \cdot [-(b_2 - a_2), b_1 - a_1] = 0,$$

skąd

$$[-(b_2 - a_2), b_1 - a_1] \perp L(a,b),$$

czyli

$$L(a,b) : -(a_1, a_2) \cdot (-(b_2 - a_2), b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)x_1 + (b_1 - a_1)x_2 = 0.$$

Stąd

$$L(a,b) : (a_2x_1 + b_1x_2 + a_1b_2) - (b_2x_1 + a_1x_2 + a_2b_1) = 0,$$

czyli

$$L(a,b) : \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0. \quad \square$$

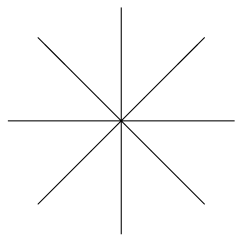
Uwaga. Niech L, K będą prostymi w $\mathbb{R}^2$. Wtedy

$L \parallel K \;\Rightarrow\; L = K \;\vee\; L \cap K = \emptyset,$

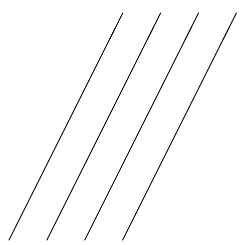
$L \nparallel K \;\Rightarrow\; L \cap K$ jest punktem.

Definicja.

Pęk prostych właściwy w $\mathbb{R}^2 \underset{df}{=}$ zbiór wszystkich prostych przechodzących przez jeden punkt



Pęk prostych niewłaściwy w $\mathbb{R}^2 \underset{df}{=}$ zbiór wszystkich prostych o tym samym kierunku



Uwaga. Każde dwie różne proste w $\mathbb{R}^2$ wyznaczają pęk (właściwy lub niewłaściwy). Stosujemy następujące oznaczenie:
$\mathrm{P}(L, K) =$ pęk prostych w $\mathbb{R}^2$ wyznaczony przez proste L, K.

Twierdzenie. (**O pęku prostych w** $\mathbb{R}^2$)

Niech $L : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$, $K : \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0$ i $L \neq K$. Wtedy

$$M \in \mathrm{P}(L, K) \Leftrightarrow \bigvee_{\eta,\lambda\in\mathbb{R},\, \eta^2+\lambda^2>0} M : \eta(\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \lambda(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) = 0.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że jeśli $\eta^2 + \lambda^2 > 0$, to

$$\eta(\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \lambda(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) = 0$$

jest równaniem liniowym pewnej prostej w $\mathbb{R}^2$. Istotnie, mamy $[\alpha_1, \alpha_2] \neq 0 \neq [\beta_1, \beta_2]$, skąd $[\eta\alpha_1 + \lambda\beta_1, \eta\alpha_2 + \lambda\beta_2] = \eta[\alpha_1, \alpha_2] + \lambda[\beta_1, \beta_2] \neq 0$.

($\Rightarrow$) Mamy $M \in \mathrm{P}(L, K)$, $a = (a_1, a_2) \in M$ i $a \notin L \cup K$.
Wystarczy przyjąć: $\eta = \beta_0 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2$ oraz $\lambda = -(\alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)$.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że

$$\bigvee_{\eta,\lambda\in\mathbb{R},\, \eta^2+\lambda^2>0} M : \eta(\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \lambda(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) = 0.$$

Mamy dwa przypadki:

1) $\mathrm{P}(L, K)$ jest właściwy.
Wtedy punkt przecięcia prostych L i K spełnia równanie prostej M, czyli $M \in \mathrm{P}(L, K)$.

2) $\mathrm{P}(L, K)$ jest niewłaściwy.
Wtedy $\bigvee_{t\neq 0} [\beta_1, \beta_2] = t[\alpha_1, \alpha_2]$ (są równoległe), skąd

$$\begin{aligned}
[\eta\alpha_1 + \lambda\beta_1, \eta\alpha_2 + \lambda\beta_2] &= \eta[\alpha_1, \alpha_2] + \lambda[\beta_1, \beta_2] \\
&= \eta[\alpha_1, \alpha_2] + \lambda t[\alpha_1, \alpha_2] \\
&= (\eta + \lambda t)[\alpha_1, \alpha_2],
\end{aligned}$$

czyli $M \parallel L \parallel K$. $\square$

Uwaga. Równoważnie mamy

$$M \in \mathrm{P}(L, K) \Leftrightarrow \bigvee_{\lambda\in\mathbb{R}} M : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \lambda(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) = 0.$$

(w tym przypadku nie istnieje λ takie, że $M = K$).

Definicja.

Proste współpękowe w $\mathbb{R}^2 \underset{df}{=}$ proste należące do jednego pęku.

Twierdzenie.

Niech $L : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$, $K : \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0$ i $M : \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = 0$ będą różnymi prostymi. Wtedy proste L, K, M są współpękowe $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dowód. Mamy $M \in \mathrm{P}(L, K) \Leftrightarrow$ istnieją $\eta, \lambda, \delta \in \mathbb{R}$, $\eta^2 + \lambda^2 > 0$ takie, że

$$\begin{cases} \eta\alpha_0 + \lambda\beta_0 = -\delta\gamma_0, \\ \eta\alpha_1 + \lambda\beta_1 = -\delta\gamma_1, \\ \eta\alpha_2 + \lambda\beta_2 = -\delta\gamma_2, \end{cases}$$

który jest równoważny układowi

$$\begin{cases} \eta\alpha_0 + \lambda\beta_0 + \delta\gamma_0 = 0, \\ \eta\alpha_1 + \lambda\beta_1 + \delta\gamma_1 = 0, \\ \eta\alpha_2 + \lambda\beta_2 + \delta\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Układ ten ma niezerowe rozwiązanie $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad \square$$

Definicja.

Płaszczyzna $\underset{df}{=}$ podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^n$ izometryczna z $\mathbb{R}^2$.

Definicja. Niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, a, b \in \mathbb{R}^n$ i niech $P \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie płaszczyzną. Wtedy

$\overrightarrow{ab}$ leży na $P \underset{df}{\Leftrightarrow} a, b \in P$.

$$\mathfrak{a} \parallel P \underset{df}{\Leftrightarrow} \bigvee_{\overrightarrow{ab}} \overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a} \ \wedge\ \overrightarrow{ab} \text{ leży na } P \ \Leftrightarrow \bigvee_{a,b \in P} \overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a}.$$

$$\mathfrak{b} \perp P \underset{df}{\Leftrightarrow} \bigwedge_{\mathfrak{a} \parallel P} \mathfrak{b} \perp \mathfrak{a}.$$

Definicja. Niech $P \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie płaszczyzną i niech $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^3$. Wtedy

Kierunek normalny płaszczyzny $P \underset{df}{=}$ kierunek wektora $\mathfrak{a} \perp P$.

Wektor normalny płaszczyzny $P \underset{df}{=}$ wektor $\mathfrak{a} \perp P$.

Definicja. Niech $P, Q \subseteq \mathbb{R}^3$ będą płaszczyznami i niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^3$. Wtedy

$$P \parallel Q \underset{df}{\Leftrightarrow} \mathfrak{a} \perp P \ \wedge \ \mathfrak{b} \perp Q \ \wedge \ \mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}.$$

$$P \perp Q \underset{df}{\Leftrightarrow} \mathfrak{a} \perp P \ \wedge \ \mathfrak{b} \perp Q \ \wedge \ \mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}.$$

Twierdzenie. Dla każdego punktu $a \in \mathbb{R}^3$ i każdego niezerowego wektora $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ istnieje w $\mathbb{R}^3$ dokładnie jedna płaszczyzna przechodząca przez a o wektorze normalnym $\mathfrak{a}$. Składa się ona z wszystkich punktów (x_1, x_2, x_3) spełniających równanie

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, \text{ gdzie } \alpha_0 = -a \cdot (\mathfrak{a}).$$

Jest to równanie liniowe płaszczyzny P takiej, że $a \in P$ i $\mathfrak{a} \perp P$.

Dowód. Podobny do dowodu twierdzenia o równaniu liniowym prostej. $\square$

Twierdzenie. Niech $P, Q \subseteq \mathbb{R}^3$ będą płaszczyznami takimi, że $P : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ i $Q : \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0$. Wtedy

$$P = Q \ \Leftrightarrow \ \bigvee_{t \neq 0} \beta_i = t\alpha_i \text{ dla } i = 0, 1, 2, 3.$$

$$P \parallel Q \ \Leftrightarrow \ \bigvee_{t \neq 0} \beta_i = t\alpha_i \text{ dla } i = 1, 2, 3.$$

Dowód. Łatwy. $\square$

Definicja. Niech $P \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie płaszczyzną, $L \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie prostą i niech $a \in \mathbb{R}^3$. Wtedy

$$\rho(a, P) \underset{df}{=} \rho(a, b), \text{ gdzie } b \in P \cap L \text{ i } a \in L \perp P$$

(odległość punktu a od płaszczyzny P w $\mathbb{R}^3$).

Twierdzenie. Niech $P \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie płaszczyzną taką, że $P : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ i niech $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Wtedy

$$\rho(a, P) = \frac{|\alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

Dowód. Podobny do dowodu odpowiedniego twierdzenia dla prostej. $\square$

Definicja. Równanie $\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ płaszczyzny P w $\mathbb{R}^3$ nazywa się *unormowane*, jeśli $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ jest wersorem (czyli $|\mathfrak{a}| = 1$).

Wniosek. Jeśli $\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ jest równaniem unormowanym płaszczyzny P w $\mathbb{R}^3$ i $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, to

$$\rho(a, P) = |\alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3|.$$

Twierdzenie. Każda płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$ posiada równanie unormowane.

Dowód. Łatwy. $\square$

Twierdzenie. Niech $P \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie płaszczyzną i niech $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ będą takie, że $\overrightarrow{ab} \nparallel \overrightarrow{ac}$. Wtedy

$$P : \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dowód. Analogiczny jak w przypadku prostej w $\mathbb{R}^2$. $\square$

Uwaga. Niech $P, Q \subseteq \mathbb{R}^3$ będą płaszczyznami. Wtedy

$P \parallel Q \;\Rightarrow\; P = Q \;\vee\; P \cap Q = \emptyset,$

$P \nparallel Q \;\Rightarrow\; P \cap Q$ jest prostą.

Definicja.

Pęk płaszczyzn właściwy w $\mathbb{R}^3 \underset{df}{=}$ zbiór wszystkich płaszczyzn zawierających tę samą prostą.

Pęk płaszczyzn niewłaściwy w $\mathbb{R}^3 \underset{df}{=}$ zbiór wszystkich płaszczyzn o tym samym kierunku normalnym.

Uwaga. Każde dwie różne płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$ wyznaczają pęk (właściwy lub niewłaściwy). Stosujemy następujące oznaczenie:

$\mathrm{P}(P, Q) =$ pęk płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$ wyznaczony przez płaszczyzny P, Q.

Twierdzenie. (**O pęku płaszczyzn w** $\mathbb{R}^3$) Niech $P, Q \subseteq \mathbb{R}^3$ będą płaszczyznami takimi, że $P : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$, $Q : \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0$ oraz $P \neq Q$. Wtedy

$$R \in \mathrm{P}(P, Q) \Leftrightarrow \bigvee_{\eta, \lambda \in \mathbb{R},\, \eta^2 + \lambda^2 > 0} R : \eta(\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) + \lambda(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) = 0.$$

Dowód. Analogiczny jak w przypadku pęku prostych w $\mathbb{R}^2$. $\square$

Uwaga. Równoważnie mamy

$$R \in \mathrm{P}(P, Q) \Leftrightarrow \bigvee_{\lambda \in \mathbb{R}} R : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \lambda(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) = 0$$

(w tym przypadku nie istnieje λ takie, że $R = Q$).

Uwaga. Niech $P, Q \subseteq \mathbb{R}^3$ będą płaszczyznami takimi, że $P \nparallel Q$. Wtedy $P \cap Q = L$ jest prostą. Jeśli $P : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ i $Q : \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0$, to

$$L : \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, \\ \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

Jest to *równanie krawędziowe* prostej L w $\mathbb{R}^3$. Wtedy $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \perp L$ i $\mathfrak{b} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] \perp L$. Stąd $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \parallel L$.

Definicja. Niech $L \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie prostą, $P \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie płaszczyzną i $a \in \mathbb{R}^3$. Wtedy

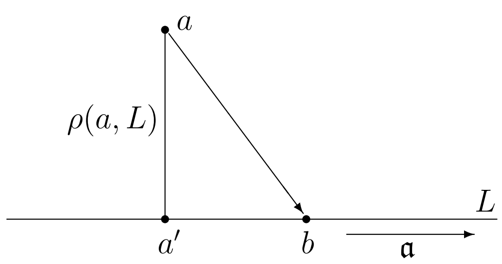
$$\rho(a, L) \underset{df}{=} \rho(a, b), \text{ gdzie } b \in L \cap P \text{ i } a \in P \perp L$$

(odległość punktu a od prostej L w $\mathbb{R}^3$).

Twierdzenie. Niech $L \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie prostą i niech $\mathfrak{a}, a, b \in \mathbb{R}^3$ będą takie, że $\mathfrak{a} \parallel L$, $a \neq b$ i $b \in L$. Wtedy

$$\rho(a, L) = \frac{\left|\mathfrak{a} \times \left[\overrightarrow{ab}\right]\right|}{|\mathfrak{a}|}.$$

Dowód. Mamy



Stąd $\sin\left(\sphericalangle\left(\mathfrak{a}, \left[\overrightarrow{ab}\right]\right)\right) = \frac{\rho(a,a')}{\rho(a,b)}$ oraz

$$\begin{aligned}
\rho(a, L) = \rho(a, a') = \rho(a, b) \sin\left(\sphericalangle\left(\mathfrak{a}, \left[\overrightarrow{ab}\right]\right)\right) \\
= \frac{|\mathfrak{a}| \left|\left[\overrightarrow{ab}\right]\right| \sin\left(\sphericalangle\left(\mathfrak{a}, \left[\overrightarrow{ab}\right]\right)\right)}{|\mathfrak{a}|} \\
= \frac{\left|\mathfrak{a} \times \left[\overrightarrow{ab}\right]\right|}{|\mathfrak{a}|}. \quad \square
\end{aligned}$$

Definicja. $k < n$

Hiperpłaszczyzna k-wymiarowa w $\mathbb{R}^n \underset{df}{=}$ podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^n$ izometryczna z $\mathbb{R}^k$.

Definicja. Niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, a, b \in \mathbb{R}^n$ i niech H^{n-1} będzie hiperpłaszczyzną $(n-1)$-wymiarową w $\mathbb{R}^n$. Wtedy

$$\mathfrak{a} \parallel H^{n-1} \underset{df}{\Leftrightarrow} \bigvee_{\overrightarrow{ab}} \overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a} \ \wedge \ a, b \in H^{n-1} \ \Leftrightarrow \bigvee_{a,b \in H^{n-1}} \overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a}.$$

$$\mathfrak{b} \perp H^{n-1} \underset{df}{\Leftrightarrow} \bigwedge_{\mathfrak{a} \parallel H^{n-1}} \mathfrak{b} \perp \mathfrak{a}.$$

Twierdzenie. Dla każdego punktu $a \in \mathbb{R}^n$ i każdego niezerowego wektora $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ istnieje w $\mathbb{R}^n$ dokładnie jedna hiperpłaszczyzna H^{n-1} taka, że $a \in H^{n-1}$ i $\mathfrak{a} \perp H^{n-1}$. Składa się ona z wszystkich punktów $(x_1, \ldots, x_n)$ spełniających równanie

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0, \text{ gdzie } \alpha_0 = -a \cdot (\mathfrak{a}).$$

Jest to równanie liniowe hiperpłaszczyzny H^{n-1} takiej, że $a \in H^{n-1}$ i $\mathfrak{a} \perp H^{n-1}$.

Dowód. Podobny do dowodu twierdzenia o równaniu liniowym prostej. $\square$

5. Przekształcenia przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie izometrią, czyli f jest na i

$$\bigwedge_{x,y\in\mathbb{R}^n} \rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y).$$

Definicja.

Niezmiennik izometrii $\underset{df}{=}$ własność, która nie zmienia się przy izometriach.

Twierdzenie. Środek odcinka jest niezmiennikiem izometrii (tzn., jeśli c jest środkiem odcinka $\langle a, b\rangle$, to $f(c)$ jest środkiem odcinka $\langle f(a), f(b)\rangle$).

Dowód. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie izometrią i niech $a, b, c \in \mathbb{R}^n$. Jeśli c jest środkiem odcinka $\langle a, b\rangle$, to

$$\rho(a, c) = \rho(b, c) = \frac{1}{2}\rho(a, b).$$

Stąd

$$\rho(f(a), f(c)) = \rho(f(b), f(c)) = \frac{1}{2}\rho(f(a), f(b)),$$

czyli $f(c)$ jest środkiem odcinka $\langle f(a), f(b)\rangle$. $\square$

Twierdzenie. Równość wektorów związanych jest niezmiennikiem izometrii.

Dowód. Wynika z definicji wektorów równych oraz poprzedniego twierdzenia. $\square$

Wniosek. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie izometrią i niech $\mathfrak{a}, a, b \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

$$\mathfrak{a} = \left[\overrightarrow{ab}\right] \;\Rightarrow\; f(\mathfrak{a}) = \left[\overrightarrow{f(a)f(b)}\right].$$

Twierdzenie. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie izometrią i niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

1) $f(0) = 0$ (dla wektorów!),
2) $f(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{b})$,
3) $f(-\mathfrak{a}) = -f(\mathfrak{a})$,
4) $f(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}) - f(\mathfrak{b})$,
5) $|f(\mathfrak{a})| = |\mathfrak{a}|$.

Dowód. 1) Oczywiste.

2) Weźmy $a, b, c \in \mathbb{R}^n$. Wtedy $\overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a}$ i $\overrightarrow{bc} \in \mathfrak{b}$ z Twierdzenia o zaczepianiu wektora swobodnego w punkcie. Wtedy $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac} \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Stąd $\overrightarrow{f(a)f(c)} \in f(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ oraz $\overrightarrow{f(a)f(c)} = \overrightarrow{f(a)f(b)} + \overrightarrow{f(b)f(c)} \in f(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{b})$. Zatem $f(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{b})$.

3) Mamy $0 = f(0) = f(\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a})) = f(\mathfrak{a}) + f(-\mathfrak{a})$. Stąd $f(-\mathfrak{a}) = -f(\mathfrak{a})$.

4) Łatwo widać, że $f(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}+(-\mathfrak{b})) = f(\mathfrak{a}) + f(-\mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}) - f(\mathfrak{b})$.

5) Niech $a, b \in \mathbb{R}^n$ będą takie, że $\overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a}$. Wtedy

$$|f(\mathfrak{a})| = \left|\left[\overrightarrow{f(a)f(b)}\right]\right| = \rho(f(a), f(b)) = \rho(a,b) = \left|\left[\overrightarrow{ab}\right]\right| = |\mathfrak{a}|\,. \quad \square$$

Wniosek. Wektor zerowy, wektor przeciwny, suma i różnica wektorów i długość wektora są niezmiennikami izometrii.

Twierdzenie. Równoległość, równoległość zgodna i równoległość przeciwna wektorów są niezmiennikami izometrii.

Dowód. Wynika z definicji równoległości i poprzedniego twierdzenia. $\square$

Wniosek. Kierunek i zwrot wektora są niezmiennikami izometrii, tzn., dla $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} f(\mathcal{K}(\mathfrak{a})) &= \mathcal{K}(f(\mathfrak{a})) \quad \text{oraz} \\ f(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) &= \mathcal{Z}(f(\mathfrak{a})). \end{aligned}$$

Twierdzenie. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie izometrią, $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n$ i $t \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$f(t\mathfrak{a}) = tf(\mathfrak{a}).$$

Dowód. Załóżmy, że $t \geqslant 0$. Wtedy $t\mathfrak{a} \upharpoonleft\upharpoonright \mathfrak{a}$, skąd $f(t\mathfrak{a}) \upharpoonleft\upharpoonright f(\mathfrak{a})$ i $tf(\mathfrak{a}) \upharpoonleft\upharpoonright f(\mathfrak{a})$. Zatem

$$f(t\mathfrak{a}) \upharpoonleft\upharpoonright tf(\mathfrak{a}).$$

Ponadto

$$|f(t\mathfrak{a})| = |t\mathfrak{a}| = t\,|\mathfrak{a}| = t\,|f(\mathfrak{a})|\,.$$

Stąd $f(t\mathfrak{a}) = tf(\mathfrak{a})$.

Podobnie dla $t < 0$ (w tym przypadku równoległość jest przeciwna). $\square$

Wniosek. Kombinacja liniowa wektorów jest niezmiennikiem izometrii, tzn.,

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} t_i \mathfrak{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} t_i f(\mathfrak{a}_i),$$

gdzie $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k \in \mathbb{R}^n$ i $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie. Iloczyn skalarny wektorów jest niezmiennikiem izometrii, tzn., $f(\mathfrak{a})\cdot f(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$.

Dowód. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie izometrią i $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$. Mamy

$$(f(\mathfrak{a})+f(\mathfrak{b}))^2 = (f(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}))^2 = |f(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})|^2 = |\mathfrak{a}+\mathfrak{b}|^2 = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^2 = \mathfrak{a}^2+2\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}+\mathfrak{b}^2 = |\mathfrak{a}|^2+2\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}+|\mathfrak{b}|^2$$

oraz

$$(f(\mathfrak{a})+f(\mathfrak{b}))^2 = (f(\mathfrak{a}))^2+2f(\mathfrak{a})\cdot f(\mathfrak{b})+(f(\mathfrak{b}))^2 = |f(\mathfrak{a})|^2+2f(\mathfrak{a})\cdot f(\mathfrak{b})+|f(\mathfrak{b})|^2 = |\mathfrak{a}|^2+2f(\mathfrak{a})\cdot f(\mathfrak{b})+|\mathfrak{b}|^2.$$

Stąd $|\mathfrak{a}|^2 + 2\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} + |\mathfrak{b}|^2 = |\mathfrak{a}|^2 + 2f(\mathfrak{a})\cdot f(\mathfrak{b}) + |\mathfrak{b}|^2$.

Zatem

$$f(\mathfrak{a})\cdot f(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}. \ \square$$

Wniosek. Prostopadłość wektorów jest niezmiennikiem izometrii.

Wniosek. Cosinus kąta między wektorami oraz miara kąta między wektorami są niezmiennikami izometrii.

Twierdzenie. Hiperpłaszczyzna k-wymiarowa w $\mathbb{R}^n$ $(k < n)$ jest niezmiennikiem izometrii, tzn., jeśli H^k jest hiperpłaszczyzną k-wymiarową, to $f(H^k)$ jest hiperpłaszczyzną k-wymiarową.

Dowód. Wynika z definicji hiperpłaszczyzny k-wymiarowej oraz faktu, że superpozycja izometrii jest izometrią. $\square$

Wniosek. Prosta oraz płaszczyzna w $\mathbb{R}^n$ są niezmiennikami izometrii.

Wniosek. Pęk prostych w $\mathbb{R}^2$ oraz pęk płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$ są niezmiennikami izometrii.

Twierdzenie. Równoległość i prostopadłość prostych w $\mathbb{R}^n$ oraz równoległość i prostopadłość płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$ są niezmiennikami izometrii.

Dowód. Wynika z faktu, że równoległość i prostopadłość wektorów są niezmiennikami izometrii. $\square$

Uwaga. Przyjmijmy:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{jeśli} \quad i = j. \end{cases}$$

Twierdzenie. (**O analitycznej postaci izometrii**) Każda izometria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest przekształceniem określonym wzorem

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i), \text{ gdzie } \mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j = \delta^i_j.$$

Wówczas $f(0) = a$ i $\mathfrak{a}_i = f(\mathfrak{e}_i)$, gdzie $\mathfrak{e}_i = [\delta^i_1, \delta^i_2, \ldots, \delta^i_n]$, $i = 1, \ldots, n$.

Dowód. Zauważmy, że $\mathfrak{e}_1 = [1, 0, 0, \ldots, 0], \mathfrak{e}_2 = [0, 1, 0, \ldots, 0], \ldots, \mathfrak{e}_n = [0, 0, 0, \ldots, 1]$. Z własności izometrii wiemy, że izometria jest przekształceniem liniowym. Stąd każda izometria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest jednoznacznie wyznaczona przez jej wartości $f(\mathfrak{e}_1), \ldots, f(\mathfrak{e}_n)$ w końcach wektorów $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$.

Teraz, jeśli $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, to $x = 0 + x_1\mathfrak{e}_1 + \ldots + x_n\mathfrak{e}_n$, skąd $f(x) = f(0) + x_1 f(\mathfrak{e}_1) + \ldots + x_n f(\mathfrak{e}_n)$. Przyjmując $f(0) = a$ oraz $f(\mathfrak{e}_i) = \mathfrak{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$ mamy $\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j = \delta^i_j$

oraz

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i). \quad \square$$

Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie podobieństwem o współczynniku $\lambda > 0$, czyli f jest na oraz

$$\bigwedge_{x,y \in \mathbb{R}^n} \rho(f(x), f(y)) = \lambda \rho(x, y).$$

Definicja.

Niezmiennik podobieństw $\underset{df}{=}$ własność, która nie zmienia się przy podobieństwach.

Uwaga. Każdy niezmiennik podobieństw jest niezmiennikiem izometrii (ponieważ izometria jest podobieństwem o współczynniku 1). Niezmiennik izometrii jest niezmiennikiem podobieństw $\Leftrightarrow$ nie zależy od odległości między punktami w $\mathbb{R}^n$. Stąd mamy:

Twierdzenie. Niezmiennikami podobieństw są: środek odcinka, równość wektorów związanych, wektor zerowy, wektor przeciwny, suma i różnica wektorów, równoległość, równoległość zgodna i równoległość przeciwna wektorów, kierunek i zwrot wektora, kombinacja liniowa wektorów, hiperpłaszczyzna k-wymiarowa w $\mathbb{R}^n$, prosta w $\mathbb{R}^n$, płaszczyzna w $\mathbb{R}^n$, równoległość i prostopadłość prostych w $\mathbb{R}^n$ oraz równoległość i prostopadłość płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$, pęk prostych w $\mathbb{R}^2$ oraz pęk płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$.

Wniosek. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie podobieństwem i niech $\mathfrak{a}, a, b \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

$$\mathfrak{a} = \left[\overrightarrow{ab}\right] \;\Rightarrow\; f(\mathfrak{a}) = \left[\overrightarrow{f(a)f(b)}\right].$$

Twierdzenie. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie podobieństwem o współczynniku $\lambda > 0$ i niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

1) $|f(\mathfrak{a})| = \lambda\, |\mathfrak{a}|$,
2) $f(\mathfrak{a}) \cdot f(\mathfrak{b}) = \lambda^2 (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$.

Dowód. 1) Weźmy $a, b \in \mathbb{R}^n$ i niech $\overrightarrow{ab} \in \mathfrak{a}$. Mamy

$$|f(\mathfrak{a})| = \left|\left[\overrightarrow{f(a)f(b)}\right]\right| = \rho(f(a), f(b)) = \lambda \rho(a, b) = \lambda \left|\left[\overrightarrow{ab}\right]\right| = \lambda\, |\mathfrak{a}|\,.$$

2) Wiemy, że$f(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$. Stąd

$$\begin{aligned}(f(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{b}))^2 &= (f(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}))^2\\ &= |f(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})|^2\\ &= \lambda^2 |\mathfrak{a}+\mathfrak{b}|^2\\ &= \lambda^2(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^2\\ &= \lambda^2 |\mathfrak{a}|^2 + 2\lambda^2\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} + \lambda^2|\mathfrak{b}|^2\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}(f(\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{b}))^2 &= (f(\mathfrak{a}))^2 + 2f(\mathfrak{a})\cdot f(\mathfrak{b}) + (f(\mathfrak{b}))^2\\ &= |f(\mathfrak{a})|^2 + 2f(\mathfrak{a})\cdot f(\mathfrak{b}) + |f(\mathfrak{b})|^2\\ &= \lambda^2|\mathfrak{a}|^2 + 2f(\mathfrak{a})\cdot f(\mathfrak{b}) + \lambda^2|\mathfrak{b}|^2.\end{aligned}$$

Zatem

$$f(\mathfrak{a})\cdot f(\mathfrak{b}) = \lambda^2\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}. \ \square$$

Wniosek. Długość wektora oraz iloczyn skalarny wektorów nie są niezmiennikami podobieństw.

Twierdzenie. Cosinus kąta między wektorami jest niezmiennikiem podobieństw.

Dowód. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie podobieństwem o współczynniku $\lambda > 0$ i niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}^n$. Z poprzedniego twierdzenia mamy

$$f(\mathfrak{a})\cdot f(\mathfrak{b}) = |f(\mathfrak{a})|\,|f(\mathfrak{b})|\cos(\sphericalangle(f(\mathfrak{a}), f(\mathfrak{b}))) = \lambda^2|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\cos(\sphericalangle(f(\mathfrak{a}), f(\mathfrak{b})))$$

oraz

$$\lambda^2(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) = \lambda^2|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\cos(\sphericalangle(\mathfrak{a},\mathfrak{b})),$$

czyli

$$\cos(\sphericalangle(f(\mathfrak{a}), f(\mathfrak{b}))) = \cos(\sphericalangle(\mathfrak{a},\mathfrak{b})). \ \square$$

Wniosek. Miara kąta między wektorami, w szczególności, prostopadłość wektorów są niezmiennikami podobieństw.

Twierdzenie. (**O analitycznej postaci podobieństwa**) Każde podobieństwo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o współczynniku $\lambda > 0$ jest przekształceniem określonym wzorem

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot(\mathfrak{a}_i), \ \text{gdzie } \mathfrak{a}_i\cdot\mathfrak{a}_j = \lambda^2\delta^i_j.$$

Wówczas $f(0) = a$ i $\mathfrak{a}_i = f(\mathfrak{e}_i)$, gdzie $\mathfrak{e}_i = [\delta^i_1, \delta^i_2, \ldots, \delta^i_n]$, $i = 1, \ldots, n$.

Dowód. Mamy $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takie, że $g(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$, gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, jest izometrią, bo

$$\rho(g(x), g(y))^2 = [g(y) - g(x)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}[f(y) - f(x)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}\rho(f(x), f(y))^2 = \rho(x, y)^2,$$

czyli $\rho(g(x), g(y)) = \rho(x, y)$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Z twierdzenia o analitycznej postaci izometrii

$$g(x) = b + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{b}_i),$$

gdzie $\mathfrak{b}_i \cdot \mathfrak{b}_j = \delta^i_j$, $g(0) = b$, $\mathfrak{b}_i = g(\mathfrak{e}_i)$ i $\mathfrak{e}_i = [\delta^i_1, \delta^i_2, \ldots, \delta^i_n]$. Stąd

$$f(x) = \lambda g(x) = \lambda b + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\lambda \mathfrak{b}_i).$$

Przyjmując $a = \lambda b$ i $\mathfrak{a}_i = \lambda \mathfrak{b}_i$, $i = 1, \ldots, n$ mamy

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i)$$

oraz

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j &= (\lambda \mathfrak{b}_i) \cdot (\lambda \mathfrak{b}_j) = \lambda^2 (\mathfrak{b}_i \cdot \mathfrak{b}_j) = \lambda^2 \delta^i_j, \\
f(0) &= \lambda g(0) = \lambda b = a, \\
\mathfrak{a}_i &= \lambda \mathfrak{b}_i = \lambda g(\mathfrak{e}_i) = f(\mathfrak{e}_i),
\end{aligned}$$

gdzie $\mathfrak{e}_i = [\delta^i_1, \delta^i_2, \ldots, \delta^i_n]$, $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Definicja. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją.

$$f \text{ jest } \textit{przekształceniem afinicznym} \underset{df}{\Leftrightarrow} \begin{aligned}[t]
&1)\ f : \mathbb{R}^n \xrightarrow[1-1]{na} \mathbb{R}^n, \\
&2) \bigwedge_{a,b,a',b' \in \mathbb{R}^n} \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{f(a')f(b')}, \\
&3) \bigwedge_{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in \mathbb{R}^n} \bigwedge_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} f(t_1 \mathfrak{a}_1 + t_2 \mathfrak{a}_2) = t_1 f(\mathfrak{a}_1) + t_2 f(\mathfrak{a}_2).
\end{aligned}$$

Wniosek. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem afinicznym i niech $\mathfrak{a}, a, b \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

$$\mathfrak{a} = \left[\overrightarrow{ab}\right] \ \Rightarrow\ f(\mathfrak{a}) = \left[\overrightarrow{f(a)f(b)}\right].$$

Wniosek. Każda izometria oraz każde podobieństwo są przekształceniami afinicznymi.

Definicja. Niech $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k \in \mathbb{R}^n$ i $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$.

Wektory $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ są *liniowo niezależne* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$

$$\sum_{i=1}^{k} t_i \mathfrak{a}_i = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = t_2 = \ldots = t_k = 0.$$

Twierdzenie. (**O analitycznej postaci przekształcenia afinicznego**) Każde przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest przekształceniem określonym wzorem

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i),$$

gdzie wektory $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ są liniowo niezależne. Wówczas $f(0) = a$ i $\mathfrak{a}_i = f(\mathfrak{e}_i)$, gdzie $\mathfrak{e}_i = [\delta_1^i, \delta_2^i, \ldots, \delta_n^i]$, $i = 1, \ldots, n$.

Dowód. Dla $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mamy $x = 0 + x_1 \cdot (\mathfrak{e}_1) + \ldots + x_n \cdot (\mathfrak{e}_n)$.

Z definicji przekształcenia afinicznego

$$f(x) = f(0) + x_1 \cdot f(\mathfrak{e}_1) + \ldots + x_n \cdot f(\mathfrak{e}_n).$$

Przyjmijmy: $f(0) = a$ i $f(\mathfrak{e}_i) = \mathfrak{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Wtedy

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i)$$

oraz z różnowartościowości przekształcenia f:

$$\begin{aligned} f(x) = f(0) \;&\Rightarrow\; x = 0, \\ \text{czyli} \quad a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i) = a \;&\Rightarrow\; x_1 = \ldots = x_n = 0, \\ \text{skąd} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i) = 0 \;&\Rightarrow\; x_1 = \ldots = x_n = 0. \end{aligned}$$

Zatem wektory $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ są liniowo niezależne. □

Twierdzenie. Superpozycja dwu przekształceń afinicznych jest przekształceniem afinicznym.

Dowód. Łatwy. □

Twierdzenie. Jeżeli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest przekształceniem afinicznym, to $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest przekształceniem afinicznym.

Dowód. Łatwy. □

Definicja.

Niezmiennik afiniczny $\underset{df}{=}$ własność, która nie zmienia się przy przekształceniach afinicznych.

Wniosek. Niezmiennikami afinicznymi są: równość wektorów związanych, kombinacja liniowa wektorów i równoległość wektorów.

Twierdzenie. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem afinicznym, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$f((1-t)a + tb) = (1-t)f(a) + tf(b).$$

Dowód. Łatwy. Wystarczy zastosować analityczną postać przekształcenia afinicznego. $\square$

Wniosek. Środek odcinka jest niezmiennikiem afinicznym.

Wniosek. Prosta w $\mathbb{R}^n$ jest niezmiennikiem afinicznym.

Wniosek. Płaszczyzna w $\mathbb{R}^n$ i hiperpłaszczyzna k-wymiarowa w $\mathbb{R}^n$ są niezmiennikami afinicznymi (bo są sumami prostych).

Wniosek. Równoległość prostych w $\mathbb{R}^n$ i równoległość płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$ są niezmiennikami afinicznymi.

Uwaga. Każdy niezmiennik afiniczny jest niezmiennikiem podobieństw (co oznacza, że jeśli jakaś własność nie jest niezmiennikiem podobieństw, to nie jest ona również niezmiennikiem afinicznym).

Wniosek. Długość wektora oraz iloczyn skalarny wektorów nie są niezmiennikami afinicznymi.

Wniosek. Cosinus kąta między wektorami, miara kąta między wektorami, w szczególności, prostopadłość wektorów nie są niezmiennikami afinicznymi.

Wniosek. Każdy niezmiennik afiniczny jest niezmiennikiem podobieństw, a każdy niezmiennik podobieństw jest niezmiennikiem izometrii.

Podamy teraz pewne charakteryzacje izometrii, podobieństwa oraz przekształcenia afinicznego. Zaczniemy od omówienia macierzy ortogonalnych.

Definicja. Niech A będzie rzeczywistą macierzą kwadratową stopnia n.

Macierz A nazywa się *ortogonalna* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ kolumny macierzy A są wzajemnie prostopadłymi wersorami w $\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie. Niech A będzie rzeczywistą macierzą kwadratową. Następujące warunki są równoważne:

1) A jest ortogonalna,
2) $A^T A = I$,
3) $A^{-1} = A^T$.

Dowód. Łatwy. $\square$

Wniosek. Niech A, B będą macierzami ortogonalnalnymi stopnia n. Wtedy

1) $\det(A) = \pm 1$,
2) A^T jest ortogonalna,
3) wiersze macierzy A są wzajemnie prostopadłymi wersorami w $\mathbb{R}^n$,
4) A^{-1} jest ortogonalna,
5) AB jest ortogonalna.

Definicja. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie izometrią (podobieństwem, przekształceniem afinicznym). Weźmy $a = (a_{01}, \ldots, a_{0n}), \mathfrak{a}_i = [\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}] \in \mathbb{R}^n$, gdzie $i = 1, \ldots, n$, i niech $(x_1, \ldots, x_n), (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\mathfrak{a}_i),$$

czyli

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = (a_{01}, \ldots, a_{0n}) + x_1(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}) + \ldots + x_n(\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn}),$$

skąd

$$\begin{cases} \overline{x}_1 = a_{01} + \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{n1}x_n, \\ \overline{x}_2 = a_{02} + \alpha_{12}x_1 + \ldots + \alpha_{n2}x_n, \\ \quad \vdots \\ \overline{x}_n = a_{0n} + \alpha_{1n}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n. \end{cases}$$

Macierz

$$A_f \underset{df}{=} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywa się *macierzą izometrii* (*podobieństwa*, *przekształcenia afinicznego*) f.

Twierdzenie. Przekształcenie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dane powyższym wzorem analitycznym jest:

1) przekształceniem afinicznym $\Leftrightarrow A_f$ jest nieosobliwa,
2) podobieństwem o współczynniku $\lambda > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} A_f$ jest ortogonalna,
3) izometrią $\Leftrightarrow A_f$ jest ortogonalna.

Dowód. Wynika z twierdzeń o analitycznych postaciach tych przekształceń. $\square$

6. Zbiory algebraiczne w przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Definicja. Niech $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Weźmy $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $i_1, \ldots, i_n \in \{0, \ldots, k\}$ oraz $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wtedy

φ jest *jednomianem n zmiennych* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ $\varphi(x) = \alpha_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$.

Stopień jednomianu $\varphi \underset{df}{=} i_1 + \ldots + i_n$.

φ jest *wielomianem n zmiennych* $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ φ jest sumą jednomianów.

Stopień wielomian $\varphi \underset{df}{=}$ największy ze stopni jednomianów składających się na wielomian φ.

Przykład.
1. $\varphi(x) = 2x_1^2 x_2^3$ jest jednomianem stopnia 5 dwu zmiennych.
2. $\varphi(x) = x_1^2 x_2 + 2x_2^2 x_3^2 - 3x_1 x_3 + 5x_1 - 4$ jest wielomianem stopnia 4 trzech zmiennych.

Definicja. Niech $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie wielomianem stopnia k. Wtedy równanie $\varphi(x) = 0$ nazywa się *równaniem algebraicznym* stopnia k.

Definicja. (**Zbiór algebraiczny w $\mathbb{R}^n$**) Niech $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie wielomianem oraz $\varphi(x) = 0$ – równaniem algebraicznym.

Zbiór algebraiczny $\underset{df}{=}$ zbiór rozwiązań równania algebraicznego,

tzn., jeśli $F \subseteq \mathbb{R}^n$, to

F jest zbiorem algebraicznym $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ [istnieje wielomian $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taki, że $x \in F \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$].

Będziemy pisać $F : \varphi(x) = 0$.

Stopień zbioru $F \underset{df}{=}$ najmniejszy ze stopni równań algebraicznych opisujących zbiór F.

Oznaczamy $\deg(F)$.

Uwagi.
1. Zbiory algebraiczne stopnia 0 w $\mathbb{R}^n$: $\emptyset$ i $\mathbb{R}^n$ (bo dla wielomianu φ stopnia 0 równanie $\varphi(x) = 0$ jest albo sprzeczne albo jest tożsamością).
2. Zbiory algebraiczne stopnia 1 w $\mathbb{R}^n$: hiperpłaszczyzny $(n-1)$-wymiarowe (jeśli $H^{n-1} : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$, to $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ jest równaniem algebraicznym stopnia 1).
3. Zbiory algebraiczne stopnia 2 w $\mathbb{R}^1$: zbiory 2-punktowe (bo wielomian stopnia 2 jednej zmiennej ma co najwyżej 2 pierwiastki).
4. Zbiory algebraiczne stopnia k w $\mathbb{R}^1$: zbiory k-punktowe (bo wielomian stopnia k jednej zmiennej ma co najwyżej k pierwiastków).

Wniosek. Prosta w $\mathbb{R}^2$ i płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$ są zbiorami algebraicznymi stopnia 1.

Twierdzenie. (**O położeniu prostej względem zbioru algebraicznego stopnia** k)

Niech $L, F \subseteq \mathbb{R}^n$, L niech będzie prostą oraz F – zbiorem algebraicznym stopnia k. Wtedy

$$L \subseteq F \quad \vee \quad \overline{\overline{L \cap F}} \leqslant k.$$

Dowód. Niech $F : \varphi(x) = 0$, gdzie φ jest wielomianem stopnia k. Z twierdzenia o prostej mamy $L : x(t) = (1-t)a + tb$, gdzie $t \in \mathbb{R}$ i $a, b \in L$, czyli $L : (x_1, \ldots, x_n) = a + (b-a)t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$ i $a, b \in L$. Szukamy wszystkich $t \in \mathbb{R}$ spełniających układ równań

$$\begin{cases} (x_1, \ldots, x_n) = a + (b-a)t, \\ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Nietrudno jest zobaczyć, że takie t nie istnieją albo wszystkie $t \in \mathbb{R}$ spełniają ten układ albo co najwyżej k liczb t spełnia ten układ. Stąd

$$L \cap F = \emptyset \quad \vee \quad L \cap F = L \quad \vee \quad \overline{\overline{L \cap F}} \leqslant \overline{\overline{\{t_1, \ldots, t_k\}}}.$$

Zatem

$$L \subseteq F \quad \vee \quad \overline{\overline{L \cap F}} \leqslant k. \ \square$$

Definicja.

Zbiór przestępny $\underset{df}{=}$ podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nie będący zbiorem algebraicznym żadnego stopnia.

Wniosek. Jeżeli dla $F \subseteq \mathbb{R}^n$ istnieje prosta L taka, że $L \cap F$ jest podzbiorem właściwym nieskończonym prostej L, to zbiór F jest przestępny.

Przykład. Sinusoida jest zbiorem przestępnym.

Twierdzenie. Zbiór algebraiczny i jego stopień są niezmiennikami afinicznymi.

Dowód. Niech $F : \varphi(x) = 0$ będzie zbiorem algebraicznym stopnia k oraz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – przekształceniem afinicznym. Wtedy f^{-1} również jest przekształceniem afinicznym. Jeśli $f(x_1, \ldots, x_n) = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$, to $f^{-1}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = (x_1, \ldots, x_n)$. Z postaci analitycznej przekształcenia afinicznego f^{-1} mamy wzory na $x_1, \ldots, x_n$. Podstawiamy je do równania $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ i otrzymujemy równanie algebraiczne stopnia k zbioru algebraicznego $\overline{F}$, czyli $f(F) = \overline{F}$. $\square$

Wniosek. Zbiór algebraiczny i jego stopień są niezmiennikami podobieństw i izometrii.

Wniosek. Zbiór przestępny jest niezmiennikiem afinicznym (a więc również podobieństw i izometrii).

Definicja. Niech $a, a' \in \mathbb{R}^n$ i niech $H \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie hiperpłaszczyzną. Wtedy

a, a' są *symetryczne względem* $H \underset{df}{\Leftrightarrow}$

$$c = \frac{a+a'}{2} \in H \ \wedge \ \left[\overrightarrow{aa'}\right] \perp H.$$

Definicja. Niech $F, H \subseteq \mathbb{R}^n$, F niech będzie zbiorem algebraicznym oraz H – hiperpłaszczyzną. Wtedy

H jest *hiperpłaszczyzną symetrii zbioru* $F \underset{df}{\Leftrightarrow}$

$$[a \in F \ \Rightarrow \ a' \in F, \text{ gdzie } a' \text{ jest punktem symetrycznym do } a \text{ względem } H].$$

Uwagi.
1. 0-wymiarowa hiperpłaszczyzna symetrii redukuje się do punktu, nazywanego *środkiem symetrii* zbioru F.
2. 1-wymiarowa hiperpłaszczyzna symetrii jest prostą, nazywaną *osią symetrii* zbioru F.

Twierdzenie. Środek symetrii zbioru algebraicznego jest niezmiennikiem afinicznym.

Dowód. Wynika wprost z definicji. □

Uwaga. Oś symetrii zbioru algebraicznego nie jest niezmiennikiem afinicznym.

Zbiory algebraiczne stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$:

1. Zbiór 1-punktowy.

Weźmy $a = (a_1, a_2), x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Mamy

$$\{a\} : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = 0$$

oraz $\varphi(x) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2$ jest wielomianem stopnia 2, czyli $\deg(\{a\}) = 2$.

2. Suma dwu różnych prostych.

Weźmy dwie proste $L, K \subseteq \mathbb{R}^2$ oraz $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Niech

$$L : \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0, \quad K : \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} x \in L \cup K \ &\Leftrightarrow \ \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0 \ \vee \ \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) = 0. \end{aligned}$$

Zatem

$$L \cup K : (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) = 0$$

oraz $\varphi(x) = (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)$ jest wielomianem stopnia 2, czyli $\deg(L \cup K) = 2$.

3. Okrąg.

Weźmy $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ oraz niech $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Okrąg jest zbiorem zdefiniowanym następująco:

$$S = S(a, r) \underset{df}{=} \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x, a) = r\},$$

gdzie a jest środkiem oraz r promieniem okręgu S. Stąd

$$\begin{aligned} x \in S \;&\Leftrightarrow\; \rho(x, a) = r \;\Leftrightarrow\; [\rho(x, a)]^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow\; (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2. \end{aligned}$$

Zatem

$$S : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 - r^2 = 0$$

oraz $\varphi(x) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 - r^2$ jest wielomianem stopnia 2, czyli $\deg(S) = 2$.

4. Stożkowa.

Definicja. (**Stożkowa**)

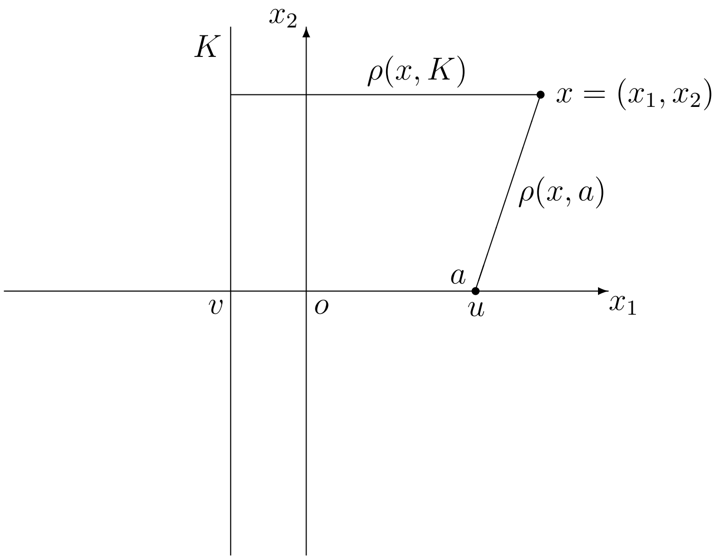
Weźmy $a \in \mathbb{R}^2$ oraz niech $K \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie prostą taką, że $a \notin K$. Ponadto niech $e > 0$.

Zbiór

$$S(a, K, e) \underset{df}{=} \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x, a) = e \cdot \rho(x, K)\}$$

nazywa się *stożkowa*. Wtedy, a nazywa się *ognisko*, K – *kierownica* oraz e – *mimośród* stożkowej $S(a, K, e)$.

Weźmy taki układ współrzędnych, żeby oś x_1 przechodziła przez ognisko a i była prostopadła do kierownicy K, czyli $a = (u, 0)$, $K : x_1 - v = 0$ i $|u - v| = d$:



Wtedy

$$\rho(x,a) = e \cdot \rho(x,K) \;\Leftrightarrow\; [\rho(x,a)]^2 = e^2 \cdot [\rho(x,K)]^2,$$

czyli

$$(x_1 - u)^2 + x_2^2 = e^2(x_1 - v)^2.$$

Stąd

$$S(a,K,e) : (1-e^2)x_1^2 + x_2^2 + 2(e^2 v - u)x_1 + (u^2 - e^2 v^2) = 0$$

i $\varphi(x) = (1-e^2)x_1^2 + x_2^2 + 2(e^2 v - u)x_1 + (u^2 - e^2 v^2)$ jest wielomianem stopnia 2, czyli $\deg(S(a,K,e)) = 2$.

Twierdzenie. Stożkowa, jej ognisko, kierownica i mimośród są niezmiennikami izometrii.

Dowód. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie izometrią. Ponieważ $S(a,K,e) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x,a) = e \cdot \rho(x,K)\}$ jest stożkową o ognisku a, kierownicy K i mimośrodzie e, więc $f(K)$ jest prostą oraz

$$\rho(f(x), f(a)) = \rho(x,a) = e \cdot \rho(x,K) = e \cdot \rho(f(x), f(K)).$$

Stąd

$$f(S(a,K,e)) = S(f(a), f(K), e) = \{y = f(x) \in \mathbb{R}^2 : \rho(y, f(a)) = e \cdot \rho(y, f(K))\}$$

jest stożkową mającą ognisko $f(a)$, kierownicę $f(K)$ oraz mimośród e. $\square$

Ćwiczenie. Pokazać, że stożkowa, jej ognisko, kierownica i mimośród są niezmiennikami podobieństw.

Definicja.

$$\text{Stożkowa } S(a,K,e) \text{ jest : } \begin{array}{l} 1)\ \textit{elipsą},\ \text{gdy } e<1, \\ 2)\ \textit{parabolą},\ \text{gdy } e=1, \\ 3)\ \textit{hiperbolą},\ \text{gdy } e>1. \end{array}$$

Wiemy, że $a=(u,0)$, $K: x_1-v=0$, $|u-v|=d$ oraz

$$S(a,K,e):(1-e^2)x_1^2+x_2^2+2(e^2v-u)x_1+(u^2-e^2v^2)=0.$$

Parabola P:

Niech $e=1$, $u=\frac{1}{2}d$ i $v=-\frac{1}{2}d$. Wtedy

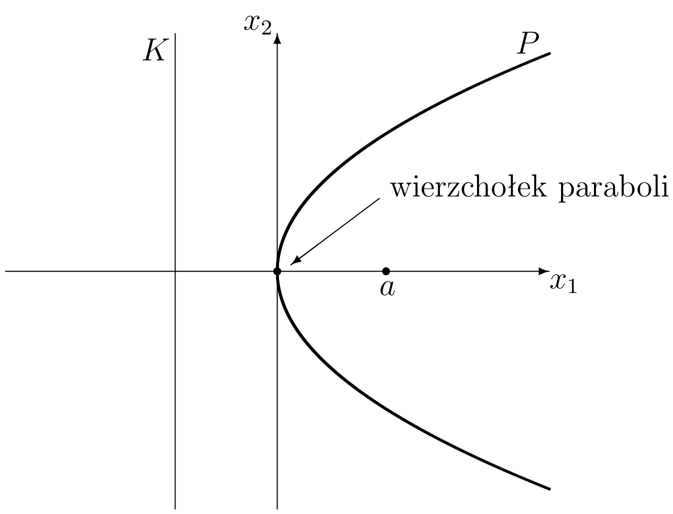
$$P: x_2^2+2(v-u)x_1+(u^2-v^2)=0,$$

czyli

$$P: x_2^2-2dx_1=0.$$

Jest to *równanie kanoniczne paraboli.*

Łatwo widać, że parabola ma jedną oś symetrii: w położeniu kanonicznym oś x_1; nie ma środków symetrii; ma wierzchołek, czyli punkt przecięcia paraboli z osią symetrii: w położeniu kanonicznym punkt $(0,0)$; ma jedno ognisko: w położeniu kanonicznym $a=(\frac{d}{2},0)$ i ma jedną kierownicę: w położeniu kanonicznym $K: x_1+\frac{d}{2}=0$.



Elipsa E:

Niech $e < 1$, $v - u = d$ i $u - e^2 v = 0$. Wtedy

$$u = \frac{e^2 d}{1 - e^2}, \quad v = \frac{d}{1 - e^2} \quad \text{i} \quad u, v > 0$$

oraz

$$u^2 - e^2 v^2 = \frac{(e^2 d)^2}{(1 - e^2)^2} - \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} = -ud.$$

Zatem

$$E : \frac{(1 - e^2) x_1^2}{ud} + \frac{x_2^2}{ud} = 1.$$

Przyjmijmy $\alpha_1 = \sqrt{\frac{ud}{1-e^2}}$ i $\alpha_2 = \sqrt{ud}$, przy czym

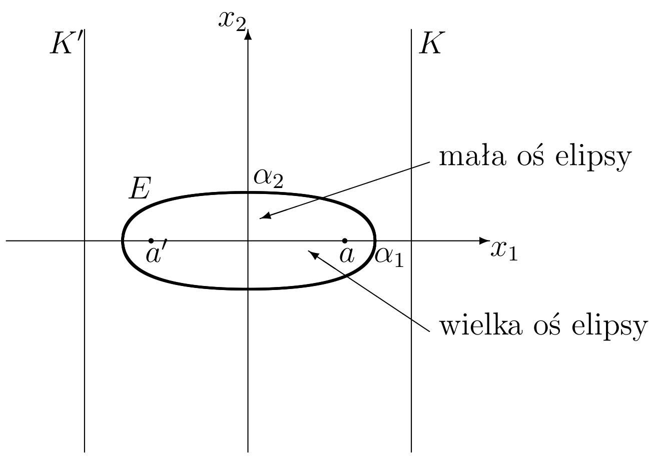
$$\alpha_1 = \frac{ed}{1 - e^2} > 0, \quad \alpha_2 = \frac{ed}{\sqrt{1 - e^2}} = \alpha_1 \sqrt{1 - e^2} < \alpha_1.$$

Wtedy

$$E : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Jest to *równanie kanoniczne elipsy.*

Łatwo widać, że elipsa ma dwie osie symetrii: w położeniu kanonicznym osie układu współrzędnych; ma jeden środek symetrii: w położeniu kanonicznym punkt $(0, 0)$; ma dwa ogniska: w położeniu kanonicznym $a = (\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}, 0)$ i $a' = (-\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}, 0)$ i dwie kierownice: w położeniu kanonicznym $K : x_1 - \frac{\alpha_1^2}{\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}} = 0$ i $K' : x_1 + \frac{\alpha_1^2}{\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}} = 0$. Ponadto mimośród $e = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}}{\alpha_1}$.



Uwaga. Okrąg możemy traktować jako elipsę (gdy $\alpha_1 = \alpha_2$).

Hiperbola H:

Niech $e > 1$, $v - u = d$ i $u - e^2 v = 0$. Wtedy

$$u = \frac{e^2 d}{1 - e^2}, \quad v = \frac{d}{1 - e^2} \quad \text{i} \quad u, v < 0$$

oraz

$$u^2 - e^2 v^2 = -ud.$$

Zatem

$$H : \frac{(1 - e^2) x_1^2}{ud} + \frac{x_2^2}{ud} = 1.$$

Przyjmując $\alpha_1 = \sqrt{\frac{ud}{1-e^2}}$ i $\alpha_2 = \sqrt{-ud}$, przy czym

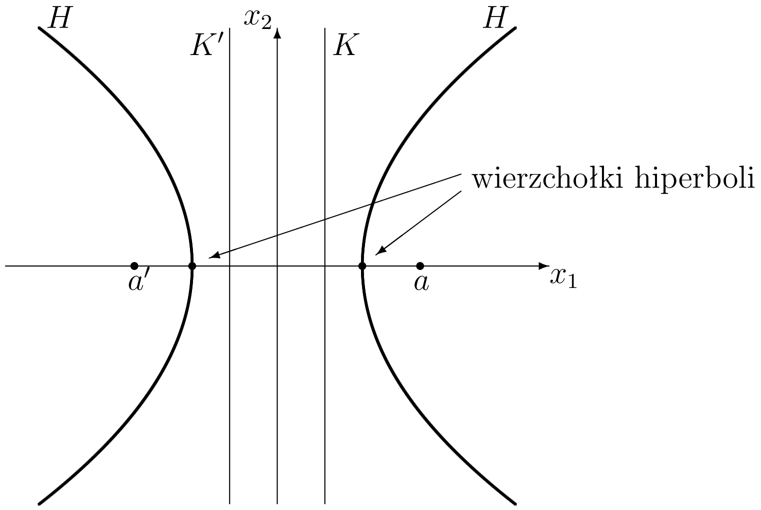
$$\alpha_1 = \frac{ed}{e^2 - 1} < -u, \quad \alpha_2 = \frac{ed}{\sqrt{e^2 - 1}} = \alpha_1 \sqrt{e^2 - 1} > \alpha_1,$$

mamy

$$H : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Jest to *równanie kanoniczne hiperboli.*

Łatwo widać, że hiperbola ma dwie osie symetrii: w położeniu kanonicznym osie układu współrzędnych; ma jeden środek symetrii: w położeniu kanonicznym punkt $(0, 0)$; ma dwa ogniska: w położeniu kanonicznym $a = (\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, 0)$ i $a' = (-\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, 0)$ i dwie kierownice: w położeniu kanonicznym $K : x_1 - \frac{\alpha_1^2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} = 0$ i $K' : x_1 + \frac{\alpha_1^2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} = 0$. Ponadto mimośród $e = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\alpha_1}$.



Definicja. Niech $F, F' \subseteq \mathbb{R}^n$ będą zbiorami algebraicznymi stopnia k. Wtedy

$$\begin{aligned}
F, F' \text{ są } \textit{izometryczne} &\underset{df}{\Leftrightarrow} \text{ istnieje izometria } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ taka, że } f(F) = F'. \\
F, F' \text{ są } \textit{podobne} &\underset{df}{\Leftrightarrow} \text{ istnieje podobieństwo } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ takie, że } f(F) = F'. \\
F, F' \textit{ przystają afinicznie} &\underset{df}{\Leftrightarrow} \text{ istnieje przekształcenie afiniczne } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ takie, że } f(F) = F'.
\end{aligned}$$

Uwaga. Zbiory izometryczne są podobne, a zbiory podobne przystają afinicznie.

Twierdzenie. Wszystkie parabole są podobne.

Dowód. Weźmy podobieństwo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że

$$f(x) = \lambda x, \text{ gdzie } \lambda > 0,$$

czyli

$$(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = f(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

Weźmy parabolę $P : x_2^2 - 2dx_1 = 0$.
Wtedy

$$(\lambda x_2)^2 - 2\lambda d \cdot (\lambda x_1) = 0.$$

Stąd $P' : \overline{x}_2^2 - 2\lambda d\overline{x}_1 = 0$ oraz $\lambda d = d' \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{d'}{d}$.
Zatem podobieństwo f przekształca parabolę P na parabolę P'. Stąd otrzymujemy tezę twierdzenia. $\square$

Twierdzenie. Wszystkie elipsy przystają afinicznie.

Dowód. Weźmy przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że

$$(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = f(x_1, x_2) = (x_1, \sqrt{1 - e^2}\, x_2), \quad 0 < e < 1.$$

Widać, że f przekształca okrąg $S(0, \alpha_1) : x_1^2 + x_2^2 = \alpha_1^2$ na elipsę $E : \overline{x}_1^2 + \frac{\overline{x}_2^2}{1-e^2} = \alpha_1^2$, czyli na elipsę $E : \frac{\overline{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\overline{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 1$ (bo $\alpha_2 = \alpha_1\sqrt{1-e^2}$). Stąd każda elipsa jest obrazem afinicznym okręgu. Zatem wszystkie elipsy przystają afinicznie. $\square$

Twierdzenie. Wszystkie hiperbole przystają afinicznie.

Dowód. Weźmy przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że

$$(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = f(x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2).$$

Widać, że f przekształca hiperbolę $H_0 : x_1^2 - x_2^2 = 1$ na hiperbolę $H : \frac{\overline{x}_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{\overline{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 1$. Stąd każda hiperbola jest obrazem afinicznym hiperboli H_0. Zatem wszystkie hiperbole przystają afinicznie. $\square$

Na koniec podamy klasyfikację za pomocą wyznaczników zbiorów algebraicznych stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$. Weźmy ogólne równanie zbioru algebraicznego stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$:

$$\alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2 + 2\alpha_{13}x_1 + 2\alpha_{23}x_2 + \alpha_{33} = 0,$$

gdzie $\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 > 0$.

Przyjmijmy:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad \alpha_{21} = \alpha_{12}$$

oraz

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad \alpha_{21} = \alpha_{12},\ \alpha_{31} = \alpha_{13},\ \alpha_{32} = \alpha_{23}.$$

Niech $\det(A) = \Delta$, $\det\left(\widetilde{A}\right) = \widetilde{\Delta}$, $r(A) = k$ i $r\left(\widetilde{A}\right) = l$. Oczywiście $0 \leqslant k \leqslant l$. Ponadto niech

$$A_{11} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad A_{22} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

Klasyfikacja zbiorów algebraicznych stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$:

$[k,l]$			
$[2,3]$	$\Delta > 0,\ \alpha_{11}\widetilde{\Delta} < 0$	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1$	elipsa
	$\Delta > 0,\ \alpha_{11}\widetilde{\Delta} > 0$	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = -1$	zbiór pusty
	$\Delta < 0$	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1$	hiperbola
$[2,2]$	$\Delta < 0$	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0$	para prostych przecinających się
	$\Delta > 0$	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0$	punkt
$[1,3]$	$\Delta = 0,\ \widetilde{\Delta} \neq 0$	$x_2^2 - 2dx_1 = 0$	parabola
$[1,2]$	$A_{22} < 0$ lub $A_{11} < 0$	$x_2^2 - \alpha_2^2 = 0$	para prostych równoległych
	$A_{22} > 0,\ A_{11} > 0$	$x_2^2 + \alpha_2^2 = 0$	zbiór pusty
$[1,1]$		$x_2^2 = 0$	(podwójna) prosta

Literatura

[1] K. Borsuk, *Geometria analityczna wielowymiarowa*, PWN, Warszawa 1976.

[2] M. Moszyńska, J. Święcicka, *Geometria z algebrą liniową*, PWN, Warszawa 1987.

[3] M. Stark, *Geometria analityczna ze wstępem do geometrii wielowymiarowej*, PWN, Warszawa 1974.