

## Działania na macierzach – powtórzenie

### Zadanie 1

Dane są macierze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

wyznacz następujące macierze:

- $\mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{B}^T$
- $\mathbf{E} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$
- $\mathbf{F} = (\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}))^{-1}$

### Zadanie 2

Dana jest macierz  $\mathbf{X}$  oraz wektor kolumnowy  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

wykonaj następujące działania:

- $\mathbf{1}^T \mathbf{y} =$
- $\mathbf{y}^T \mathbf{y} =$
- $\mathbf{X}^T \mathbf{X} =$
- $\mathbf{X}^T \mathbf{y} =$
- $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} =$
- $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} =$

Zauważ, że wynikiem pierwszego z powyższych działań jest suma elementów wektora kolumnowego  $\mathbf{y}$ , drugiego suma kwadratów elementów tego wektora.

### Zadanie 3

Dana jest macierz  $\mathbf{X}$  oraz wektor kolumnowy  $\mathbf{y}$  o wymiarach odpowiednio  $(n \times 2)$  oraz  $(n \times 1)$ :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_t \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_t \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Korzystając ze spostrzeżeń z poprzedniego zadania uzupełnij poniższe równości:

$$\mathbf{1}^T \mathbf{y} = \sum_{t=1}^n y_t \quad \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \dots \quad \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

**Zadanie 4**

Dany jest wektor:

$$\mathbf{y}^T = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_t \quad \cdots \quad y_n]$$

wykaż, że zachodzi następująca równość:

$$\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2 = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \frac{1}{n} (\mathbf{1}^T \mathbf{y})^2$$

**Zadanie 5**

Wyznacz macierze odwrotne, dla następujących macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 6 \\ -2 & -5 & 2 \\ 2 & -9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & -4 \\ 5 & 10 & 5 \\ -4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$